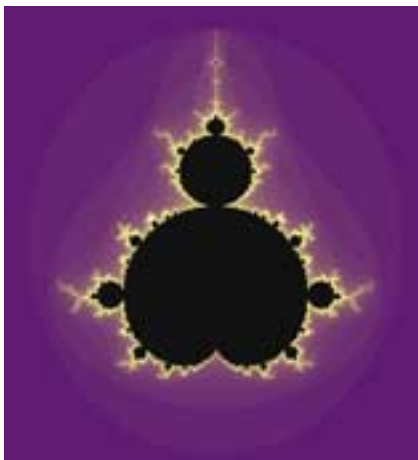




Certitudes sans démonstration?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Identifier les constantes mathématiques nécessite des tables numériques, de bonnes idées et d'excellentes machines.

Vous devez calculer l'intégrale de $\sin(77x)\sin(5x)/x^2$ entre 0 et l'infini et, grâce à votre logiciel, vous obtenez la valeur M égale à 7,853981634. Cela ne vous semble pas très satisfaisant, et vous soupçonnez que cette intégrale a une expression simple, laquelle vous permettrait des simplifications quand vous la combinez avec d'autres expressions qui entrent dans votre calcul. Cette valeur est peut-être une fraction p/q avec p et q entiers ; ou une fraction multipliée par $\sqrt{2}$ (c'est-à-dire quelque chose de la forme $p\sqrt{2}/q$ avec p et q entiers) ; ou une fraction multipliée par π (quelque chose de la forme $\pi \times p/q$) ; ou une fraction multipliée par e (quelque chose de la forme $e \times p/q$). Comment faire

pour reconnaître M ? Nous verrons que l'inverseur de Simon Plouffe (*voir les encadrés 2 et 4*) répond à la question, et plus encore. Nous allons examiner différentes méthodes d'identification.

ÉNUMÉRATION ET COMPARAISON

La première idée consiste à calculer tous les nombres p/q , $\sqrt{2} \times p/q$, $\pi \times p/q$, $e \times p/q$, puis à rechercher celui qui se rapproche le plus de M . Il existe une infinité de tels nombres et parmi eux certains sont aussi proches qu'on le veut de M . Abordons donc le problème progressivement. Essayons en supposant d'abord que p et q sont tous deux compris entre 1 et 10.

Il faut 100 essais pour comparer M aux nombres de la forme p/q , 100 autres pour ceux de la forme $\sqrt{2} \times p/q$, etc., soit, au total, 400 essais à faire. Si on ne trouve rien, il faudra essayer en faisant l'hypothèse que p et q sont tous deux des entiers compris entre 1 et 100. Cela nécessitera 40 000 essais. Puis, si nécessaire, on passera à l'intervalle de 1 à 1 000, ce qui conduira à 4 millions de calculs, etc. Le nombre d'essais en fonction de l'intervalle de recherche de 1 à n augmente très rapidement, comme le carré de n .

Dans notre cas, dès la première tentative, avec p et q entre 1 et 10, on découvre que, parmi les 400 nombres essayés pour approcher M , le nombre $5\pi/2$ se trouve situé à un milliardième

1. RAISONNEMENTS HEURISTIQUES

Tous les nombres considérés sont entre 0 et 40. On dispose d'un nombre M qu'on soupçonne être parmi 400 nombres candidats. On compare M aux 400 nombres, on découvre qu'il s'approche de l'un d'eux, $5\pi/2$, de moins 10^{-9} (un milliardième). Ne doit-on pas considérer comme assuré que M vaut $5\pi/2$?

Raisonnement 1

Si M était choisi au hasard entre 0 et 40, alors la probabilité pour qu'il se trouve à un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait inférieure à : $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 40 = 2 \cdot 10^{-8}$, car la longueur totale de l'intervalle considéré est 40 (les cas possibles) et qu'il y a 400 petits intervalles chacun de longueur $2 \cdot 10^{-9}$ correspondant aux cas favorables (les nombres situés à moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés), ce qui au total constitue un ensemble d'intervalles d'une longueur cumulée inférieure à $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9}$. Si M était choisi au hasard, la probabilité de trouver M à moins d'un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait donc inférieure à $2 \cdot 10^{-8}$. C'est vraiment très peu, ce n'est donc pas par hasard que cela s'est produit, c'est parce que M vaut $5\pi/2$.

Raisonnement 2 (utilisant la formule de Bayes)

Supposons que nous ayons quelques raisons de considérer que M est l'un des 400 nombres testés (événement noté A) et que plus précisément *a priori* nous évaluons la probabilité de A à $1/10$. La probabilité, *a priori*, que M ne soit pas parmi les 400 nombres (événement B) est de $9/10$. La formule de Bayes indique comment recalculer cette probabilité après l'expérience conduisant à la découverte que " M est à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres" (événement E).

La nouvelle probabilité pour que M soit l'un des 400 nombres (c'est-à-dire $5\pi/2$) est :

$P_A' = P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B)$ où
 P_A = probabilité *a priori* de A = $1/10$
 P_B = probabilité *a priori* de B = $9/10$

Q_A = probabilité de E sachant A (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A est vrai) = 1

Q_B = probabilité de E sachant B (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A n'est pas vrai) = $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 40 = 2 \cdot 10^{-8}$

$P_A' =$ probabilité de A sachant E (probabilité *a fortiori* que A soit l'un de 400 nombres, donc $5\pi/2$) = $P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B) = P_A' = (1/10) / (1/10 + (9/10) \cdot (2 \cdot 10^{-8})) = 0,99999982$

La probabilité est passée de 10% à 99,999982 %

En partant de $P_A = 1\%$, on arriverait à : $P_A' = 99,99980\%$.

En partant de $P_A = 0,1\%$, on arriverait à : $P_A' = 99,99802\%$.

Donc même si, au départ, on a très peu de raisons de croire que M est parmi les 400 nombres essayés, une fois le calcul fait on en est quasiment certain.

Notons bien qu'aucun des deux raisonnements n'est totalement justifié, car :

– M n'est pas choisi au hasard (raisonnement 1),

– on ne peut donner aucun sens rigoureux à l'évaluation *a priori* $P_A = 1/10$ (raisonnement 2)

Avec les raisonnements heuristiques, on aboutit à des quasi-certitudes, mais pas à des preuves mathématiques.