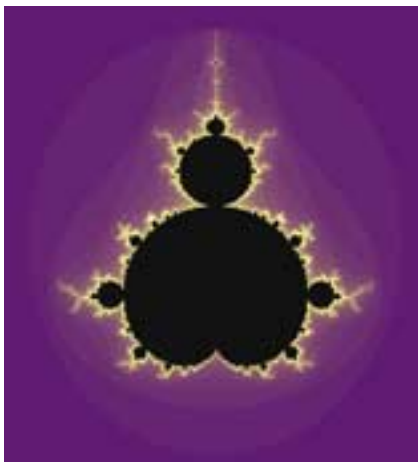




Certitudes sans démonstration?

JEAN-PAUL DELAHAYE

Identifier les constantes mathématiques nécessite des tables numériques, de bonnes idées et d'excellentes machines.

Vous devez calculer l'intégrale de $\sin(77x)\sin(5x)/x^2$ entre 0 et l'infini et, grâce à votre logiciel, vous obtenez la valeur M égale à 7,853981634. Cela ne vous semble pas très satisfaisant, et vous soupçonnez que cette intégrale a une expression simple, laquelle vous permettrait des simplifications quand vous la combinez avec d'autres expressions qui entrent dans votre calcul. Cette valeur est peut-être une fraction p/q avec p et q entiers ; ou une fraction multipliée par $\sqrt{2}$ (c'est-à-dire quelque chose de la forme $p\sqrt{2}/q$ avec p et q entiers) ; ou une fraction multipliée par π (quelque chose de la forme $\pi \times p/q$) ; ou une fraction multipliée par e (quelque chose de la forme $e \times p/q$). Comment faire

pour reconnaître M ? Nous verrons que l'inverseur de Simon Plouffe (*voir les encadrés 2 et 4*) répond à la question, et plus encore. Nous allons examiner différentes méthodes d'identification.

ÉNUMÉRATION ET COMPARAISON

La première idée consiste à calculer tous les nombres p/q , $\sqrt{2} \times p/q$, $\pi \times p/q$, $e \times p/q$, puis à rechercher celui qui se rapproche le plus de M . Il existe une infinité de tels nombres et parmi eux certains sont aussi proches qu'on le veut de M . Abordons donc le problème progressivement. Essayons en supposant d'abord que p et q sont tous deux compris entre 1 et 10.

Il faut 100 essais pour comparer M aux nombres de la forme p/q , 100 autres pour ceux de la forme $\sqrt{2} \times p/q$, etc, soit, au total, 400 essais à faire. Si on ne trouve rien, il faudra essayer en faisant l'hypothèse que p et q sont tous deux des entiers compris entre 1 et 100. Cela nécessitera 40 000 essais. Puis, si nécessaire, on passera à l'intervalle de 1 à 1 000, ce qui conduira à 4 millions de calculs, etc. Le nombre d'essais en fonction de l'intervalle de recherche de 1 à n augmente très rapidement, comme le carré de n .

Dans notre cas, dès la première tentative, avec p et q entre 1 et 10, on découvre que, parmi les 400 nombres essayés pour approcher M , le nombre $5\pi/2$ se trouve situé à un milliardième

1. RAISONNEMENTS HEURISTIQUES

Tous les nombres considérés sont entre 0 et 40. On dispose d'un nombre M qu'on soupçonne être parmi 400 nombres candidats. On compare M aux 400 nombres, on découvre qu'il s'approche de l'un d'eux, $5\pi/2$, de moins 10^{-9} (un milliardième). Ne doit-on pas considérer comme assuré que M vaut $5\pi/2$?

Raisonnement 1

Si M était choisi au hasard entre 0 et 40, alors la probabilité pour qu'il se trouve à un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait inférieure à : $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 40 = 2 \cdot 10^{-8}$, car la longueur totale de l'intervalle considéré est 40 (les cas possibles) et qu'il y a 400 petits intervalles chacun de longueur $2 \cdot 10^{-9}$ correspondant aux cas favorables (les nombres situés à moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés), ce qui au total constitue un ensemble d'intervalles d'une longueur cumulée inférieure à $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9}$.

Si M était choisi au hasard, la probabilité de trouver M à moins d'un milliardième d'un des 400 nombres essayés serait donc inférieure à $2 \cdot 10^{-8}$. C'est vraiment très peu, ce n'est donc pas par hasard que cela s'est produit, c'est parce que M vaut $5\pi/2$.

Raisonnement 2 (utilisant la formule de Bayes)

Supposons que nous ayons quelques raisons de considérer que M est l'un des 400 nombres testés (événement noté A) et que plus précisément *a priori* nous évaluons la probabilité de A à $1/10$. La probabilité, *a priori*, que M ne soit pas parmi les 400 nombres (événement B) est de $9/10$. La formule de Bayes indique comment recalculer cette probabilité après l'expérience conduisant à la découverte que " M est à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres" (événement E).

La nouvelle probabilité pour que M soit l'un des 400 nombres (c'est-à-dire $5\pi/2$) est :

$P_{A'} = P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B)$ où
 P_A = probabilité *a priori* de A = $1/10$
 P_B = probabilité *a priori* de B = $9/10$

Q_A = probabilité de E sachant A (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A est vrai) = 1

Q_B = probabilité de E sachant B (probabilité que M soit situé à une distance de moins de 10^{-9} d'un des 400 nombres essayés sachant que A n'est pas vrai) = $400 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 40 = 2 \cdot 10^{-8}$

$P_{A'}$ = probabilité de A sachant E (probabilité *a fortiori* que A soit l'un de 400 nombres, donc $5\pi/2$) = $P_A Q_A / (P_A Q_A + P_B Q_B) = P_{A'} = (1/10) / (1/10 + (9/10) \cdot (2 \cdot 10^{-8})) = 0,99999982$

La probabilité est passée de 10% à 99,999982 %

En partant de $P_A = 1\%$, on arriverait à : $P_{A'} = 99,99980\%$.

En partant de $P_A = 0,1\%$, on arriverait à : $P_{A'} = 99,99802\%$.

Donc même si, au départ, on a très peu de raisons de croire que M est parmi les 400 nombres essayés, une fois le calcul fait on en est quasiment certain.

Notons bien qu'aucun des deux raisonnements n'est totalement justifié, car :

— M n'est pas choisi au hasard (raisonnement 1),

— on ne peut donner aucun sens rigoureux à l'évaluation *a priori* $P_A = 1/10$ (raisonnement 2)

Avec les raisonnements heuristiques, on aboutit à des quasi-certitudes, mais pas à des preuves mathématiques.

de M , alors que les 399 autres nombres sont tous situés à une distance de M plus grande que un dixième (le plus proche est $8/1$, situé à $0,15$ de M).

N'a-t-on pas une bonne raison de croire que M est exactement $5\pi/2$ et que ce sont les erreurs de calcul et d'arrondi qui expliquent qu'il n'y a pas égalité parfaite? La question est très délicate et constitue le cœur d'une certaine pratique expérimentale des mathématiques. Que $5\pi/2$ ressemble fort à M n'est bien sûr pas une preuve mathématique que les deux nombres sont égaux. Toutefois, on prend peu de risques en acceptant d'identifier les deux nombres, car on raisonne ainsi. Les raisonnements permettant de justifier cette identification sont présentés dans l'encadré 2.

Une variante de la méthode par énumération et comparaison est de prendre M , $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e , et de multiplier ces quatre nombres par $q = 1, 2, 3, \dots, 10$, en regardant à chaque fois si le résultat est un entier (si, par exemple pour q égal à 2, on trouve que $qM/\pi \sim 5$, cela signifie que, vraisemblablement, $M \sim 5\pi/2$).

Si on recherche comme tout à l'heure le nombre M en imposant à p et q d'être entre 1 et 10, cette méthode conduit à faire 43 multiplications (trois au départ, puis 10 pour chaque nombre). Pour p et q entre 1 et 100, il y a 403 multiplications à faire, etc. L'augmentation est plus modérée que précédemment.

Cette seconde méthode est plus efficace : elle aboutit plus rapidement au résultat que vraisemblablement M vaut $5\pi/2$. Bien sûr, on n'obtient, là aussi, qu'une forte présomption.

Une troisième idée consiste à utiliser qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain moment. On pourrait donc tenter de reconnaître la période de M , $M/\sqrt{2}$, M/π et M/e . On serait amené à faire quatre multiplications, puis quatre recherches de périodes, ce qui semble encore meilleur que la seconde idée. Malheureusement, la période du développement d'un nombre p/q peut être de longueur $q-1$. C'est le cas, par exemple, pour p/q avec $0 < p < q$ et $q = 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193$ (il s'agit de ce qu'on appelle les entiers premiers longs). Cela signifie que, si $M = 13/109$, on ne reconnaîtra la période que si l'on dispose de plus de 109 chiffres (disons 200), ce qui est difficile : la méthode du repérage de période est mauvaise car elle demande trop de chiffres pour aboutir.

La quatrième idée (qui va nous conduire aux techniques les plus modernes de l'identification des constantes) provient d'une méthode ancienne de recherche d'approximations des nombres par des fractions disposées

sur de multiples étages, appelées fractions continues, dont les propriétés sont explicitées dans l'encadré 3.

LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE

Le développement en fractions continues d'un nombre est une représentation très intéressante de ce nombre (comme le sont les développements décimaux et binaires). Cette représentation fait apparaître sa nature mieux que le développement décimal, car on a les remarquables résultats (a) (b) et (c) indiqués plus bas. Ils ont été prouvés aux XVII^e et XVIII^e siècles par Huygens, Euler et Lagrange.

(a) Un nombre x est rationnel si et seulement si son développement en fractions continues est fini.

(b) Un nombre x est quadratique, c'est-à-dire de la forme $p/q + \sqrt{r/s}$ avec p, q, r et s entiers (racine d'une équation du second degré à coefficients ration-

nels), si et seulement si son développement en fractions continues est périodique à partir d'un certain point.

(c) Certains nombres transcendants (par définition, ils ne sont pas solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) ont un développement en fractions continues qui suit une règle clairement identifiable. Le nombre e qui est transcendant s'écrit ainsi : $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, \dots]$

Si on tombe sur une fraction continue infinie et non périodique ayant une règle bien claire (c'est le cas de l'exemple précédent), l'utilisation des résultats (a) et (b) nous donne une très sérieuse raison de croire que le nombre est irrationnel et non quadratique (irrationnel, car ayant une fraction continue infinie ; non quadratique, car ayant une fraction continue non périodique). Le mathématicien qui, par exemple, calculerait les 60 premiers coefficients de la fraction continue de e et verrait tout le long 2 1 2 1 1

2. QUELQUES CONSTANTES MATHÉMATIQUES PARMI LES 75 MILLIONS DE LA TABLE DE SIMON PLOUFFE

Le nombre d'Archimède

π : rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

$= 3,14159265358979323846264338327\dots$

Connu avec une précision de 51 539 600 000 de décimales.

Durée du calcul : 29 heures 3 minutes + 37 heures 8 minutes (pour la vérification).

Machine : Hitachi SR2201 avec 1 024 processeurs.

Auteur du calcul : Y. Kanada et D. Takahashi, de l'Université de Tokyo

(calculs menés du 6 au 8 juin 1997 et du 4 au 6 juillet 1997).

La racine carrée de deux

$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872421\dots$

Connu avec une précision de 137 438 953 444 décimales.

Durée du calcul : 7,5 heures. Machine : Hitachi SR2201 avec 1 024 processeurs.

Auteur du calcul : Y. Kanada et D. Takahashi, de l'Université de Tokyo (3 août 1997).

La constante des logarithmes népériens

$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots = 2,71828182845904523536028747135\dots$

Connue avec une précision de 50 000 817 décimales.

Durée du calcul : 714 heures. Machine : HP 9000/778 160 Mhz.

Auteur du calcul : Patrick Demichel (30 septembre 1997).

(un calcul de un milliard de décimales aurait été mené à bien par D. et G. Chudnovsky).

Logarithme de deux

$\log(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots = 0,693147180559945309417232121458\dots$

Connu avec une précision de 58 486 400 décimales.

Durée du calcul : 53 heures. Machine : SGI R10000.

Auteur du calcul : Xavier Gourdon (décembre 1997).

Le nombre d'or

$F = (1+\sqrt{5})/2 = 1,61803398874989484820458683436\dots$

Connu avec une précision de 10 000 000 de décimales.

Durée du calcul : 29 minutes. Machine : SGI R10000; 194 Mhz.

Auteur du calcul : Simon Plouffe (2 décembre 1996).

La constante d'Euler-Mascheroni

$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \log(n) \right) = 0,577215664901\dots$

Connue avec une précision de 7 286 255 décimales.

Durée du calcul : 47 heures 36 minutes. Machine : SGI R10000.

Auteur du calcul : Xavier Gourdon (décembre 1997).

La constante d'Apéry

$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + 1/5^3 + \dots$

$= 1,20205690315959428539973816151\dots$

Connu avec une précision de 32 000 279 décimales.

Durée du calcul : 35 heures, 21 minutes. Machine : 9x MIPS R10000 180 Mhz.

Auteur du calcul : Sebastian Wedeniwski (17 mars 1998).