

3. LES FRACTIONS CONTINUES

Tout nombre x peut s'écrire sous la forme d'une fraction à une multitude d'étages, appelée fraction continue :

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots$ sont des nombres entiers.

Voici comment obtenir à la main la fraction continue de $233/177$.

On fait une succession de divisions en reprenant pour dividende de la division n le diviseur de la division $n-1$, et pour diviseur de la division n le reste de la division $n-1$, ce qui conduit à la disposition suivante :

$$\begin{array}{r} 233 \overline{) 177} \quad 177 \overline{) 56} \quad 56 \overline{) 9} \quad 9 \overline{) 3} \quad 3 \overline{) 1} \\ \underline{177} \quad \underline{177} \quad \underline{56} \quad \underline{27} \quad \underline{3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

La première division s'interprète $233/177 = 1 + 56/177 = 1 + 1/(177/56)$.

La seconde donne :

$233/177 = 1 + 1/(177/56) = 1 + 1/(3 + 9/56) = 1 + 1/(3 + 1/(56/9))$, etc.

Au total, la fraction continue est : $[1, 3, 6, 4, 2]$

$$233/177 = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

Un nombre est rationnel si et seulement si sa fraction continue est finie. En effet :

- si la fraction continue est finie, le nombre est rationnel (on réduit la fraction continue de proche en proche jusqu'à l'avoir sous la forme p/q),
- quand on applique la méthode indiquée ci-dessus, le diviseur de l'étape n est le reste de l'étape $n-1$, donc le diviseur diminue strictement à chaque étape, et il n'y a donc qu'un nombre fini d'étapes.

Si un nombre a un développement en fraction continue périodique à partir d'un certain point, alors il s'écrit sous la forme $p/q + \sqrt{r/s}$ avec p, q, r , et s entiers.

Exemple. Prenons le nombre $x = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$

Considérons le nombre dont le développement est :

$y = [4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$

Le nombre y vérifie :

$$y = 4 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/y))) = 4 + 1/(1 + 1/(1 + y/(y+1))) = 4 + 1/(1 + (1+y)/(2y+1))$$

$$= 4 + (2y+1)/(3y+2) = (14y+9)/(3y+2).$$

$$3y^2 + 2y = 14y + 9$$

$$3y^2 - 12y - 9 = 0$$

$$y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$y_1 = 2 + \sqrt{7}$$

$$y_2 = 2 - \sqrt{7} \text{ (à éliminer car } y > 4)$$

$$\text{d'où } x = y - 2 = \sqrt{7}$$

Pour tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique, on peut faire un raisonnement analogue (à chaque fois, après réduction de la fraction, on aboutit à une équation du second degré). Donc tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique est un nombre quadratique (de la forme $p/q + \sqrt{r/s}$).

Il n'est pas aussi simple de démontrer la réciproque : si un nombre est de la forme $p/q + \sqrt{r/s}$ avec p, q, r et s entiers, alors son développement est périodique à partir d'un certain point. C'est pourtant ce que Lagrange a établi.

Les fractions continues des racines carrées

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$\sqrt{5} = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$$

$$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots]$$

$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, \dots]$$

$$\sqrt{8} = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$$

$$\sqrt{9} = [3]$$

$$\sqrt{10} = [3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots]$$

$$\sqrt{11} = [3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, \dots]$$

$$\sqrt{12} = [3, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, \dots]$$

$$\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 6, 1, \dots]$$

$$\sqrt{14} = [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, \dots]$$

Le nombre d'or

C'est le nombre dont le développement en fraction continue est le plus simple.

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

$$(1 + \sqrt{5})/2 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

4 1 1 6 1 1 8 1 1 10 1 1 12 jusqu'à 1 1 40 ne pourrait pas croire que cela peut changer plus loin ; il serait donc convaincu que e n'est ni rationnel, ni quadratique... mais n'aurait pas de démonstration.

Cette situation illustre plus nettement encore que notre premier exemple qu'on peut avoir de fortes raisons de croire un certain résultat mathématique, sans en avoir la moindre preuve. En mathématiques, il existe des situations où le bon sens nous commande de croire une certaine vérité que nous sommes pourtant incapable de prouver d'une façon qui satisfasse un mathématicien classique.

L'objectif des mathématiciens expérimentalistes est justement de rechercher des vérités mathématiques par tous les moyens, y compris informatiques, de collecter le plus possible de raisons de croire aux vérités découvertes et, si c'est possible, de les démontrer au sens habituel, qui reste la seule façon d'avoir des certitudes parfaites (personne ne le conteste).

Leur philosophie est qu'il vaut mieux connaître une relation mathématique qu'on ne sait pas prouver, que l'ignorer. Lorsqu'en cryptographie on fabrique des nombres premiers par des méthodes probabilistes (qui ne garantissent pas entièrement que les nombres produits sont premiers) on parle de nombres premiers à usage commercial. Par analogie, on pourrait dire que les mathématiciens expérimentalistes s'intéressent aux vérités mathématiques à usage commercial.

Notons que, contrairement au développement de e ou de racine de 2, le développement en fractions continues du nombre π malheureusement ne présente pas de régularité apparente.

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, \dots]$$

QUATRIÈME MÉTHODE D'IDENTIFICATION

Les fractions continues fournissent la meilleure méthode pour résoudre notre problème d'identification de M : prendre les quatre nombres $M, M/\sqrt{2}, M/\pi$ et M/e et calculer leur développement en fractions continues jusqu'à ce qu'un terme soit presque entier (ce qui signifiera qu'on est très proche d'un nombre rationnel).

Ici en s'arrêtant, soit au dixième terme du développement en fractions continues, soit quand on a un entier à 10^{-5} près, on obtient les résultats suivants.

Pour M : $[7, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 2, 28, 1, 26]$ rien n'est trouvé ;

Pour $M/\sqrt{2}$: $[5, 1, 1, 4, 6, 9, 1, 2, 1, 2, 5]$ rien n'est trouvé ;

Pour M/π : $[2, 1, 1+1/765855891] \sim [2, 1, 1] = 2+1/(1+1/1) = 5/2$;