

3. LES FRACTIONS CONTINUES

Tout nombre x peut s'écrire sous la forme d'une fraction à une multitude d'étages, appelée fraction continue :

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots$ sont des nombres entiers.

Voici comment obtenir à la main la fraction continue de $233 / 177$.

On fait une succession de divisions en reprenant pour dividende de la division n le diviseur de la division $n-1$, et pour diviseur de la division n le reste de la division $n-1$, ce qui conduit à la disposition suivante :

$$\begin{array}{r} 233 \overline{) 177} \quad 177 \overline{) 56} \quad 56 \overline{) 9} \quad 9 \overline{) 3} \quad 3 \overline{) 1} \\ \underline{177} \quad \underline{177} \quad \underline{56} \quad \underline{9} \quad \underline{3} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

La première division s'interprète $233/177 = 1 + 56 / 177 = 1 + 1 / (177 / 56)$.

La seconde donne :

$233/177 = 1 + 1 / (177 / 56) = 1 + 1 / (3 + 9 / 56) = 1 + 1 / (3 + 1 / (56 / 9)) \dots$, etc.

Au total, la fraction continue est : $[1, 3, 6, 4, 2]$

$$233/177 = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

Un nombre est rationnel si et seulement si sa fraction continue est finie. En effet :

- si la fraction continue est finie, le nombre est rationnel (on réduit la fraction continue de proche en proche jusqu'à l'avoir sous la forme p/q),
- quand on applique la méthode indiquée ci-dessus, le diviseur de l'étape n est le reste de l'étape $n-1$, donc le diviseur diminue strictement à chaque étape, et il n'y a donc qu'un nombre fini d'étapes.

Si un nombre a un développement en fraction continue périodique à partir d'un certain point, alors il s'écrit sous la forme $p/q + \sqrt{r/s}$ avec p, q, r , et s entiers.

Exemple. Prenons le nombre $x = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$

Considérons le nombre dont le développement est :

$y = [4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots]$

Le nombre y vérifie :

$$y = 4 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + y))) = 4 + 1/(1 + 1/(1 + y/(y + 1))) = 4 + 1/(1 + (1 + y)/(2y + 1))$$

$$= 4 + (2y + 1)/(3y + 2) = (14y + 9)/(3y + 2).$$

$$3y^2 + 2y = 14y + 9$$

$$3y^2 - 12y - 9 = 0$$

$$y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$y_1 = 2 + \sqrt{7}$$

$$y_2 = 2 - \sqrt{7} \text{ (à éliminer car } y > 4)$$

$$\text{d'où } x = y - 2 = \sqrt{7}$$

Pour tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique, on peut faire un raisonnement analogue (à chaque fois, après réduction de la fraction, on aboutit à une équation du second degré). Donc tout nombre dont le développement en fraction continue est périodique est un nombre quadratique (de la forme $p/q + \sqrt{r/s}$).

Il n'est pas aussi simple de démontrer la réciproque : si un nombre est de la forme $p/q + \sqrt{r/s}$ avec p, q, r et s entiers, alors son développement est périodique à partir d'un certain point. C'est pourtant ce que Lagrange a établi.

Les fractions continues des racines carrées

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$$

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$\sqrt{5} = [2, 1, 4, 4, 4, 4, 4, \dots]$$

$$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots]$$

$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, \dots]$$

$$\sqrt{8} = [2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$$

$$\sqrt{9} = [3]$$

$$\sqrt{10} = [3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots]$$

$$\sqrt{11} = [3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, \dots]$$

$$\sqrt{12} = [3, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, \dots]$$

$$\sqrt{13} = [3, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 6, 1, \dots]$$

$$\sqrt{14} = [3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, \dots]$$

Le nombre d'or

C'est le nombre dont le développement en fraction continue est le plus simple.

$$(1 + \sqrt{5})/2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

$$(1 + \sqrt{5})/2 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

4 1 1 6 1 1 8 1 1 10 1 1 12 jusqu'à 1 1 40 ne pourrait pas croire que cela peut changer plus loin ; il serait donc convaincu que e n'est ni rationnel, ni quadratique... mais n'aurait pas de démonstration.

Cette situation illustre plus nettement encore que notre premier exemple qu'on peut avoir de fortes raisons de croire un certain résultat mathématique, sans en avoir la moindre preuve. En mathématiques, il existe des situations où le bon sens nous commande de croire une certaine vérité que nous sommes pourtant incapable de prouver d'une façon qui satisfasse un mathématicien classique.

L'objectif des mathématiciens expérimentalistes est justement de rechercher des vérités mathématiques par tous les moyens, y compris informatiques, de collecter le plus possible de raisons de croire aux vérités découvertes et, si c'est possible, de les démontrer au sens habituel, qui reste la seule façon d'avoir des certitudes parfaites (personne ne le conteste).

Leur philosophie est qu'il vaut mieux connaître une relation mathématique qu'on ne sait pas prouver, que l'ignorer. Lorsqu'en cryptographie on fabrique des nombres premiers par des méthodes probabilistes (qui ne garantissent pas entièrement que les nombres produits sont premiers) on parle de nombres premiers à usage commercial. Par analogie, on pourrait dire que les mathématiciens expérimentalistes s'intéressent aux vérités mathématiques à usage commercial.

Notons que, contrairement au développement de e ou de racine de 2, le développement en fractions continues du nombre π malheureusement ne présente pas de régularité apparente.

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, \dots]$$

QUATRIÈME MÉTHODE D'IDENTIFICATION

Les fractions continues fournissent la meilleure méthode pour résoudre notre problème d'identification de M : prendre les quatre nombres $M, M/\sqrt{2}, M/\pi$ et M/e et calculer leur développement en fractions continues jusqu'à ce qu'un terme soit presque entier (ce qui signifiera qu'on est très proche d'un nombre rationnel).

Ici en s'arrêtant, soit au dixième terme du développement en fractions continues, soit quand on a un entier à 10^{-5} près, on obtient les résultats suivants.

Pour M : $[7, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 2, 28, 1, 26]$ rien n'est trouvé ;

Pour $M/\sqrt{2}$: $[5, 1, 1, 4, 6, 9, 1, 2, 1, 2, 5]$ rien n'est trouvé ;

Pour M/π : $[2, 1, 1 + 1/765855891] \sim [2, 1, 1] = 2 + 1/(1 + 1/1) = 5/2$;

Pour M/e [2, 1, 8, 28, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 48] rien n'est trouvé.

Le fait numérique que, pour M/π , on ait trouvé, à très peu près, la fraction $5/2$ nous montre à nouveau que vraisemblablement M/π vaut $5/2$, c'est-à-dire que M vaut $5\pi/2$.

Pour s'assurer de la validité de notre méthode (c'est-à-dire pour avoir de meilleures raisons encore de croire que M vaut $5\pi/2$), on calcule non plus 10, mais 20 termes des fractions continues (ce qui correspond à des millions d'essais de constantes) ; on trouve cette fois deux candidats pour M . Le premier est toujours $5\pi/2$, le second est le nombre rationnel : 3926990817/500000000 (simplification de 7853981634/100000000 par 2).

Entre les deux candidats, le plus simple est sans hésitation possible $5\pi/2$, c'est lui qu'on retiendra donc si l'on est mis en demeure de choisir sans pouvoir faire de calculs ou de preuves supplémentaires. Remarquons que, concernant l'exemple de départ, les trois méthodes essayées aboutissent au même résultat (ce qui semble le rendre encore plus probable). Un calcul direct de l'intégrale à l'origine du problème est d'ailleurs possible et confirme que l'identification $5\pi/2$ est bonne.

Considérons un autre exemple pour illustrer l'idée des fractions continues : $M = 4,222012200165$.

Pour M : [4, 4, 1, 1, 58, 4, 2, 2, 37, 3, 1] ; pour $M/\sqrt{2}$: [2, 1, 67, 1, 1, 3, 1, 14, 1, 26, 5] ; pour M/π : [1, 2, 1, 9, 1, 5, 3, 1, 3, 4, 1] ; pour M/e : [1, 1, 1, 4, 4, 1, 1/829123] ~ [1, 1, 1, 4, 4, 1] = 73/47. Cela suggère fortement que $M = 73e/47$ (qui est effectivement l'expression utilisée pour définir M).

La méthode des fractions continues va droit au but. Aussi est-elle beaucoup plus puissante que les méthodes envisagées au début, car les nombres quadratiques ont des développements périodiques, et certains nombres transcendants ont des développements en fractions continues simples qu'un œil attentif peut identifier.

L'INVERSEUR DE SIMON PLOUFFE

Aujourd'hui il existe une méthode supplémentaire, bien plus puissante encore et plus commode que celles décrites ci-dessus. Cette

méthode est l'inverseur de Simon Plouffe, qui est à la fois un immense dictionnaire de constantes mathématiques et une machine à rechercher des expressions simples pour les constantes numériques qu'on lui soumet.

Alors que d'habitude on donne une expression à une machine pour qu'elle la calcule, l'inverseur, lui, retrouve l'expression à partir du résultat, d'où son nom.

Lorsque vous avez un nombre dont vous connaissez quelques chiffres, vous pouvez le soumettre à l'inverseur de Plouffe en ouvrant la page internet de son site : <http://www.lacim.uqam.ca/pi/>. Vous pouvez aussi lui soumettre une question par courrier électronique à : numbers@math.uqam.ca. Exemple de question : «lookup 1.4142». L'inverseur, après quelques secondes de calcul, vous renverra sa réponse par courrier électronique.

Si on lui propose une constante M , l'inverseur de Plouffe l'examine en mettant en œuvre progressivement des méthodes de recherche de plus en plus complexes et puissantes.

Dans un premier temps, il se contente de comparer votre M à une liste de

constantes mathématiques qui sont mémorisées dans une grande table. Ensuite, il utilise une série d'algorithmes (dont celui des fractions continues) pour rechercher des combinaisons de ces constantes ou des expressions remarquables vérifiées par le nombre étudié.

TABLEAU DE MENDELEÏEV

La grande table de constantes, noyau de l'inverseur de Simon Plouffe, peut être vue comme un tableau de Mendeleïev des constantes mathématiques. Elle tente de réunir tous les nombres réels simples rencontrés en mathématiques, quel qu'en soit le domaine. La table ne contient pas les constantes physiques qui souvent dépendent de choix arbitraires dans les unités de mesure (cela n'empêche pas que de nombreux physiciens utilisent l'inverseur pour mener leurs travaux théoriques).

Les nombres de la table sont stockés avec la plus grande précision possible (tous ne sont pas connus avec le même nombre de décimales, certains sont d'ailleurs très difficiles à calculer).

On trouvera bien sûr π , $\sqrt{2}$, e , mais aussi : $\log(3)$, $\exp(\pi)$, le nombre d'or, le nombre de Champernowne 0,123456789101112..., la constante d'Artin (qui indique la proportion de nombres premiers longs), la constante de Feigenbaum liée à la théorie du chaos, la somme des $1/n^n$, et mille autres choses. Non, pas mille, bien plus : aujourd'hui, la table contient 75 millions de constantes.

Cela semble beaucoup, pourtant cela résulte d'un choix : il serait trop facile de mettre $\log(2)$, $\log(3)$, $\log(4)$ jusqu'à $\log(1000000000)$. L'intérêt de la table provient du fait que tout ce qui y est placé est assez simple. On n'y met pas π^{435256} , pas plus que $(\log(463052)\sqrt{2543})^{12}$.

Les calculs des constantes de la table sont vérifiés et complétés en permanence. Des centres de recherche au Canada, aux États Unis ou en France prêtent leurs machines pour ces calculs. Simon Plouffe évalue que plus de deux ans de temps de calculs d'un processeur rapide sont ainsi matérialisés dans sa table. Le volume de la table est de

4. L'INVERSEUR DE SIMON PLOUFFE

Quand on pose à l'inverseur de Plouffe la question : "Quelle est la constante : 7,853981634 ?" on obtient un extrait de la table. La réponse correcte ($5\pi/2$) est une constante tellement basique qu'elle y est représentée plusieurs fois sous des codages différents. On reconnaît $\pi/4$ qui possède les mêmes chiffres que $5\pi/2$ puisque $5\pi/2 = 10\pi/4$

7853977541646791 = (p212) S10(1,2)(8,-8,8,2,-9)
 7853977611656700 = (a261) $-3-2*x+3*x^2+3*x^3-2*x^4-6*x^5$
 7853978825673085 = (q399) $5/63662$
 7853979266757639 = (v131) $\sum(1/(8^n-8^n+52), n=1..inf)$
 7853979538716315 = (m001) $(\exp(-1/2*\pi)-\log(\gamma))\ln(1+sr(2))/\ln(1+sr(2))$
 7853980101855253 = (a311) $\cos(\pi/158)*\sin(\pi/17/59)$
 7853980314963090 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
 7853980378630278 = (a334) $21^{1/2}*(12^{1/4}-19)$
 7853980996271272 = (a215) Discriminant of a Real Cubic Field
 7853981032645112 = (v131) $\sum(1/(5/2^n+145/2^n-44), n=1..inf)$
 7853981126778084 = (m001) $(1/2-Backhouse^*GAM(5/6))/Backhouse$
 7853981633974126 = (v131) $\sum(1/(4^n-4^n+101), n=1..inf)$
7853981633974483 = (a007) $\pi/4$
7853981633974483 = (m001) $\pi*\cos(\pi/12)*\sin(\pi/12)$
7853981633974483 = (m405) $1/4*sr(\pi)^2$
7853981633974483 = (p199) $S(1,1)[1,1,1,0,-1,1,-1,0]$
7853981633974483 = (s207) A003881 Concatenated sequence from EIS
 7853981689970672 = (v003) $\sum(1/(2^n+(29/2^n+31/2^n-12)), n=1..inf)$
 7853981829182755 = (f259) $F(7/12,9/10;1/10,2/9,4/7;1)$
 7853982300884955 = (q399) $355/452$
 7853982572371080 = (m001) $BesK(0,1)+\cos(1)^*GAM(13/24)$
 7853982658543988 = (f259) $F(7/12,5/8;1/7,4/5,2/3;1)$
 7853982819699420 = (p212) S10(1,5)(6,5,0,-3,-2)
 7853983015535401 = (v003) $\sum(1/(3^n+(17/2^n-25/2^n+28)), n=1..inf)$
 7853983588391700 = (m001) $BesJ(0,1)/BesK(0,1)*\exp(-\pi)$
 7853983588391700 = (m001) $BesJ(0,1)/\exp(\pi)/BesK(0,1)$
 7853983685097973 = (m001) $\exp(1/2)*Zeta(1,2)^*GAM(1/12)$
 7853983963809479 = (p210) $\sqrt{3}T_2(0,1,-1,-1,1,1,-1,0,0,-1,-1)$
 7853984493158376 = (v015) $\sum((19/6^n-3-19^n+353/6^n-28)^n/n^n, n=1..inf)$
 7853984748948144 = (g404) $-\Psi(2/15)+\Psi(9/14)-\Psi(13/20)$
 7853984752358357 = (m001) $(sr(2)+GAM(11/12))^*BesI(0,2)$
 7853984917319985 = (v131) $\sum(1/((13/2^n-173/2^n+47)), n=1..inf)$