

diomètres gravimétriques, que les compagnies pétrolières peuvent désormais utiliser. Sept d'entre elles l'ont déjà fait pour prospecter le golfe du Mexique. Ainsi, après avoir dressé la carte des gradients gravitationnels autour d'un dôme de sel, un géologue de la Société *Shell* a déterminé les structures géologiques sous-jacentes : la base du dôme est très nette sur cette nouvelle carte, alors qu'elle restait floue avec les relevés sismiques.

L'industrie minière s'intéresse aussi aux gradiomètres gravitationnels, pour la recherche de petits gisements enfouis dans des terrains inaccessibles ou pour la détermination de structures géologiques complexes. Pour ce type de prospection, on doit embarquer le gradiomètre à bord d'un avion. Nous avons vu que les irrégularités du vol interdisent des relevés précis avec des gravimètres, mais les gradiomètres gravitationnels permettront de tourner cette difficulté : les accélérations engendrées par la turbulence de l'air sont de même nature que l'attraction gravitationnelle, mais elles n'engendrent pas de gradients gravitationnels. Des ingénieurs australiens ont déjà mis au point une version supraconductrice de la balance d'Eötvös, que l'on peut embarquer à bord d'un avion. La Société *Bell Geospace*, à la fondation de laquelle R. Anderson et moi-même avons participé en 1994, tente d'adapter aux avions le gradiomètre conçu pour les sous-marins.

La gradiométrie gravitationnelle commence à séduire les géologues, comme elle a séduit autrefois les commandants de sous-marins. En outre, au contraire des méthodes actuelles de mesure, qui causent des dégâts environnementaux lorsque les équipes de prospection sillonnent en tous sens une région avec leurs camions et leurs bulldozers, cette technique, mise en œuvre d'un avion, ne nuit pas à l'environnement.

---

Robin BELL est chercheur à l'Observatoire de la Terre Lamont-Doherty de l'Université Columbia.

Robin E. BELL, Roger N. ANDERSON et Lincoln F. PRATSON, *Gravity Gradiometry Resurfaces*, in *Leading Edge* (Society of Exploration Geophysicists), vol. 16, n° 1, pp. 55-60, janvier 1997.

Robin E. BELL et R.O. HANSEN, *The Rise and Fall of Early Oil Field Technology : The Torsion Balance Gradiometer*, in *Leading Edge*, vol. 17, n° 1, pp. 81-83, janvier 1998.

---



# La conjecture du soufflet

IAN STEWART

*Grâce à une formule qui donne le volume d'un polyèdre, on montre que les polyèdres flexibles ne changent pas de volume en se déformant.*

**T**out bricoleur qui a déjà assemblé quatre planches pour construire une bibliothèque sait que les rectangles ne sont pas rigides. En appuyant sur le bord d'une bibliothèque mal construite, on la déforme en un parallélogramme. En revanche, les triangles sont rigides : on ne peut changer leur forme sans modifier la longueur d'au moins un de leurs côtés. Le triangle est d'ailleurs le seul polygone rigide. Une bibliothèque de n'importe quelle autre forme – rectangle, pentagone, hexagone – doit être consolidée par ajout de traverses diagonales : le polygone initial est alors divisé en triangles rigides.

On peut aussi renforcer une bibliothèque en clouant un fond plat. Le problème entre ainsi dans la troisième dimension, où les choses deviennent bien plus intéressantes. Pendant près de 200 ans, les mathématiciens ont été étonnés par la rigidité des polyèdres, des solides fermés qui comportent un nombre fini de faces polygonales.

Encore récemment, on pensait que tous les polyèdres à faces triangulaires étaient rigides. Cette hypothèse était fautive : il existe des polyèdres flexibles dont la forme change sans que la forme des faces triangulaires soit modifiée. De surcroît, il y a quelques mois, des mathématiciens ont démontré la conjecture du soufflet, selon laquelle le volume d'un polyèdre flexible reste constante lorsque sa forme varie. Cette démonstration, fondée sur une ancienne formule grecque, ouvre un nouveau champ de recherche en géométrie.

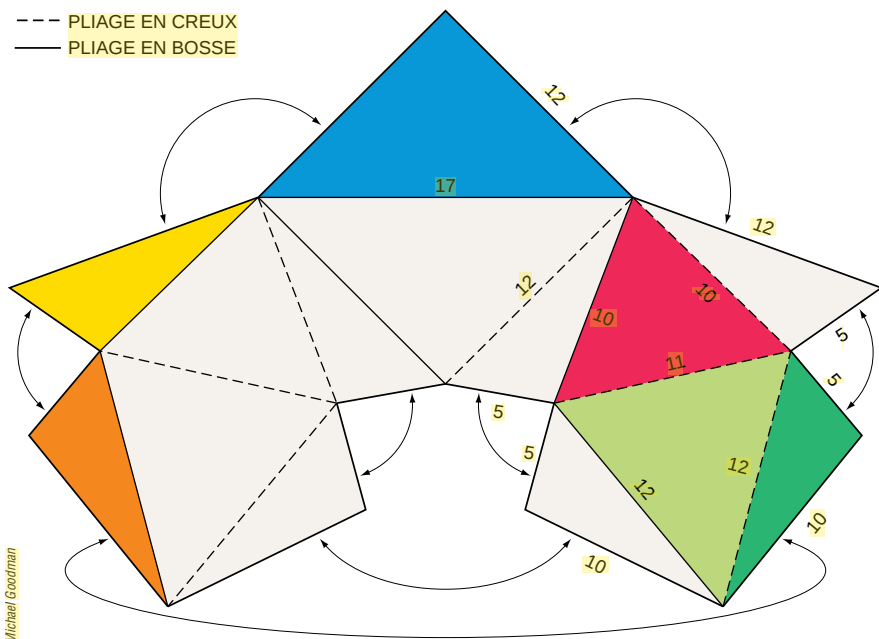
Par pliage d'une feuille de papier, on obtient une foule de formes flexibles, étudiées par les maîtres japonais de l'*origami* : des oiseaux qui battent des ailes, des grenouilles dont les pattes bougent, etc. Ces pliages sont-ils des exemples de polyèdres flexibles ? Non, car lorsque la grenouille en papier bouge ses pattes, le papier s'incurve légèrement. De même, on plie ou l'on déplie le soufflet d'un accordéon parce que les

faces qui le composent se courbent et s'étirent légèrement. En revanche, les faces d'un polyèdre flexible ne se déforment pas. Lorsqu'un polyèdre flexible se déforme, seuls les angles entre les faces adjacentes varient : les arêtes sont comme des charnières, tout le reste demeure parfaitement rigide.

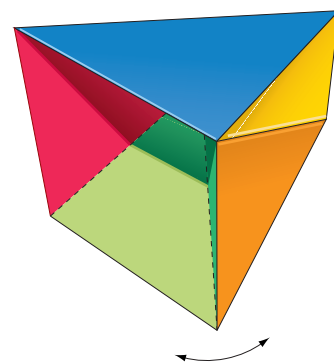
L'étude des polyèdres flexibles commence en 1813, lorsque le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy montre qu'un polyèdre convexe – c'est-à-dire dont la courbure est toujours dans le même sens, sans creux, ni bosses – n'est pas flexible. Qu'en est-il des polyèdres non convexes ? En 1897, l'ingénieur français Raoul Bricard découvre que les polyèdres non convexes sont flexibles si leurs faces peuvent s'interpénétrer. Les polyèdres de Bricard sont des objets abstraits, mais on peut s'en faire une idée à l'aide de tiges articulées avec lesquelles on matérialise leurs arêtes (par exemple, avec des pailles que l'on relie par une ficelle).

En 1977, le mathématicien canadien Robert Connelly modifie le polyèdre non convexe de Bricard de sorte qu'il

--- PLIAGE EN CREUX  
— PLIAGE EN BOSSE



Michael Goodman



Patron d'un polyèdre flexible (à gauche). Si vous le reproduisez sur une feuille de carton fin et si vous pliez comme indiqué par les pointillés, en collant des arêtes selon les flèches (une petite languette qui dépasse des arêtes vous aidera), vous obtiendrez un polyèdre flexible, dont les mouvements sont indiqués sur la perspective (ci-dessus).

demeure flexible, mais que les faces ne s'interpénètrent plus. Klaus Steffen, de l'Université de Düsseldorf, a simplifié cette construction et a construit un polyèdre flexible à neuf sommets et 14 faces triangulaires (voir la figure).

Si vous construisez cet objet, vous observerez que, quand certaines faces du polyèdre se rapprochent, d'autres s'éloignent, de sorte que le volume semble rester constant. Denis Sullivan, de l'Université de New York, a testé cette hypothèse en perçant un petit trou dans un polyèdre flexible et en le remplissant de fumée ; durant la flexion du polyèdre, aucune fumée ne s'en échappa. Cette expérience corroborait l'hypothèse du volume constant, mais elle ne la démontrait pas (l'hypothèse du volume constant est nommée conjecture du soufflet, car elle implique qu'un polyèdre flexible ne se comporte pas comme un soufflet, lequel change de volume comme il change de forme, inspirant et soufflant de l'air).

Dans le plan, l'analogue à deux dimensions de la conjecture du soufflet est faux : lorsque l'on déforme un polygone flexible, sa surface diminue (un rectangle s'aplatit en parallélogramme, puis en ligne, de surface nulle). Pourquoi un soufflet polyédrique ne peut-il exister dans l'espace tridimensionnel ?

Pour résoudre cette énigme, R. Connelly et deux autres mathématiciens – Idzhad Sabitov, de l'Université de Moscou, et Anke Walz, de l'Université Cornell – partirent d'une ancienne formule qui donne l'aire d'un triangle. Sans doute trouvée par Archimède, cette formule a été attribuée à Héron d'Alexandrie, un mathématicien grec du début de notre ère qui en a donné une démonstration. Cette formule relie l'aire  $x$  d'un triangle aux longueurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  de ses côtés (voir l'encadré). La relation entre ces valeurs est polynomiale, c'est-à-dire qu'interviennent uniquement des puissances entières de  $x$ , de  $a$ , de  $b$  et de  $c$ .

Une relation analogue relie-t-elle le volume d'un polyèdre quelconque aux longueurs de ses arêtes ? Pour quelques polyèdres particuliers, de telles relations sont connues : par exemple, le volume d'un cube ou d'un parallélogramme est égal au produit de la longueur par la largeur et par la profondeur ; pour le tétraèdre, un polyèdre à quatre faces triangulaires, une relation analogue est connue. Toutefois, personne n'avait jamais trouvé une formule générale qui donne le volume d'un polyèdre.

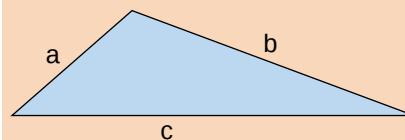
Supposons néanmoins qu'une telle formule existe. Dans ce cas, la conjecture du soufflet serait vérifiée, car le volume d'un polyèdre dépendrait seulement

des longueurs des arêtes. Lors de la flexion d'un polyèdre, les longueurs de ses arêtes sont inchangées et son volume serait donc constant. Ce raisonnement possède cependant une faille : une équation polynomiale peut avoir plusieurs solutions distinctes, de sorte qu'en théorie le volume pourrait «sauter» d'une valeur à une autre. En fait, une variation discontinue du volume ne peut pas se produire dans le monde physique : comme la flexion est continue, le volume ne peut changer subitement de valeur, de sorte qu'il doit rester constant.

Comment trouver la formule du volume ? Les mathématiciens ont commencé leur démonstration en modifiant la formule du volume d'un tétraèdre, qui est similaire à la formule de Héron. De la même façon que, dans le plan, tout polygone peut être divisé en triangles, dans l'espace, tout polyèdre peut être divisé en tétraèdres : le volume du polyèdre est alors la somme des volumes des tétraèdres constitutifs. Cette méthode ne suffit pas à résoudre le problème : elle conduit seulement à la formule qui relie les arêtes de tous les tétraèdres constitutifs. Or, plusieurs de ces arêtes ne sont pas des arêtes du polyèdre initial, mais des diagonales qui relient un sommet du polyèdre à un autre, et leur longueur peut changer lors de la flexion. Les mathématiciens ont dû travailler algébriquement leur relation pour se débarrasser de ces longueurs variables.

Ce processus laborieux aboutit en 1996 : I. Sabitov construisit un algorithme qui permet de trouver le volume de n'im-

## La formule d'Héron



Nommons  $a$ ,  $b$  et  $c$  les longueurs des côtés d'un triangle,  $x$ , son volume, et  $p$ , la moitié de son périmètre, soit :

$$p = (a+b+c)/2.$$

On a alors :

$$x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Lorsqu'on élève cette équation au carré, on obtient la formule de Héron :

$$16x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

Johnny Johnson

porte quel polyèdre. Puis, en 1997, l'équipe de trois mathématiciens simplifia considérablement cet algorithme. Pour un octaèdre – un solide à huit faces triangulaires –, la formule est une équation polynomiale qui contient le volume élevé à la puissance 16. Pour des polyèdres plus compliqués, les puissances sont encore supérieures.

L'existence d'une relation polynomiale pour n'importe quel polyèdre est étonnante, car, dans le plan, il n'existe pas d'équivalent de la formule de Héron qui s'appliquerait à tous les polygones. R. Connelly et I. Sabitov pensent savoir prouver la conjecture du soufflet dans un espace à quatre dimensions, mais pas à cinq dimensions. Et là, il n'est plus question de plier du papier pour se faire une idée des résultats !

## RÉACTIONS

**E**n réponse à l'article *Us et charmes des dés* (voir *Pour la Science*, mars 1998), plusieurs lecteurs m'ont indiqué d'autres ensembles de dés non transitifs. Le dé A est marqué 3, 3, 4, 4, 8, 8 ; le dé B, 1, 1, 5, 5, 9, 9 ; et le dé C, 6, 6, 7, 7, 2, 2. En moyenne, le dé B bat A cinq fois sur neuf, C bat B cinq fois sur neuf et A bat C cinq fois sur neuf. George Trepal, de Floride, fait remarquer que ces nombres arrangés correctement forment les colonnes d'un carré magique (voir ci-dessous), où la somme des nombres de chaque ligne ou de chaque colonne est égale à 15. De surcroît, si l'on utilise les nombres des lignes pour former les faces des dés, l'ensemble de dés obtenus – A (8, 8, 1, 1, 6, 6) ; B (3, 3, 5, 5, 7, 7) ; et C (4, 4, 9, 9, 2, 2) – est également non transitif : A bat B, B bat C et C bat A, avec des probabilités égales à 5/9. Des ensembles de dés similaires, construits à partir de carrés magiques plus grands, semblent ne pas avoir cette propriété de non-transitivité. Cette proposition peut-elle être montrée ou infirmée ?

Le meilleur ensemble de dés non transitifs proposé par G. Trepal, c'est-à-dire celui qui utilise les nombres les plus petits, a des faces marquées de la façon suivante : A (1, 1, 4, 4, 4, 4) ; B (3, 3, 3, 3, 3, 3) ; et C (2, 2, 2, 5, 5). Dans ce cas, A bat B avec une probabilité 6/9, B bat C avec une probabilité 6/9 et C bat A avec une probabilité 5/9.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

JOHNNY JOHNSON