

demeure flexible, mais que les faces ne s'interpénètrent plus. Klaus Steffen, de l'Université de Düsseldorf, a simplifié cette construction et a construit un polyèdre flexible à neuf sommets et 14 faces triangulaires (voir la figure).

Si vous construisez cet objet, vous observerez que, quand certaines faces du polyèdre se rapprochent, d'autres s'éloignent, de sorte que le volume semble rester constant. Denis Sullivan, de l'Université de New York, a testé cette hypothèse en perçant un petit trou dans un polyèdre flexible et en le remplissant de fumée ; durant la flexion du polyèdre, aucune fumée ne s'en échappa. Cette expérience corroborait l'hypothèse du volume constant, mais elle ne la démontrait pas (l'hypothèse du volume constant est nommée conjecture du soufflet, car elle implique qu'un polyèdre flexible ne se comporte pas comme un soufflet, lequel change de volume comme il change de forme, inspirant et soufflant de l'air).

Dans le plan, l'analogie à deux dimensions de la conjecture du soufflet est fautive : lorsque l'on déforme un polygone flexible, sa surface diminue (un rectangle s'aplatit en parallélogramme, puis en ligne, de surface nulle). Pourquoi un soufflet polyédrique ne peut-il exister dans l'espace tridimensionnel ?

Pour résoudre cette énigme, R. Connelly et deux autres mathématiciens – Idzhad Sabitov, de l'Université de Moscou, et Anke Walz, de l'Université Cornell – partirent d'une ancienne formule qui donne l'aire d'un triangle. Sans doute trouvée par Archimède, cette formule a été attribuée à Héron d'Alexandrie, un mathématicien grec du début de notre ère qui en a donné une démonstration. Cette formule relie l'aire x d'un triangle aux longueurs a , b et c de ses côtés (voir l'encadré). La relation entre ces valeurs est polynomiale, c'est-à-dire qu'interviennent uniquement des puissances entières de x , de a , de b et de c .

Une relation analogue relie-t-elle le volume d'un polyèdre quelconque aux longueurs de ses arêtes ? Pour quelques polyèdres particuliers, de telles relations sont connues : par exemple, le volume d'un cube ou d'un parallélogramme est égal au produit de la longueur par la largeur et par la profondeur ; pour le tétraèdre, un polyèdre à quatre faces triangulaires, une relation analogue est connue. Toutefois, personne n'avait jamais trouvé une formule générale qui donne le volume d'un polyèdre.

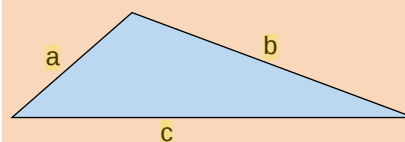
Supposons néanmoins qu'une telle formule existe. Dans ce cas, la conjecture du soufflet serait vérifiée, car le volume d'un polyèdre dépendrait seulement

des longueurs des arêtes. Lors de la flexion d'un polyèdre, les longueurs de ses arêtes sont inchangées et son volume serait donc constant. Ce raisonnement possède cependant une faille : une équation polynomiale peut avoir plusieurs solutions distinctes, de sorte qu'en théorie le volume pourrait « sauter » d'une valeur à une autre. En fait, une variation discontinue du volume ne peut pas se produire dans le monde physique : comme la flexion est continue, le volume ne peut changer subitement de valeur, de sorte qu'il doit rester constant.

Comment trouver la formule du volume ? Les mathématiciens ont commencé leur démonstration en modifiant la formule du volume d'un tétraèdre, qui est similaire à la formule de Héron. De la même façon que, dans le plan, tout polygone peut être divisé en triangles, dans l'espace, tout polyèdre peut être divisé en tétraèdres : le volume du polyèdre est alors la somme des volumes des tétraèdres constitutifs. Cette méthode ne suffit pas à résoudre le problème : elle conduit seulement à la formule qui relie les arêtes de tous les tétraèdres constitutifs. Or, plusieurs de ces arêtes ne sont pas des arêtes du polyèdre initial, mais des diagonales qui relient un sommet du polyèdre à un autre, et leur longueur peut changer lors de la flexion. Les mathématiciens ont dû travailler algébriquement leur relation pour se débarrasser de ces longueurs variables.

Ce processus laborieux aboutit en 1996 : I. Sabitov construisit un algorithme qui permet de trouver le volume de n'im-

La formule d'Héron



Nommons a , b et c les longueurs des côtés d'un triangle, x , son volume, et p , la moitié de son périmètre, soit :

$$p = (a+b+c)/2.$$

On a alors :

$$x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Lorsqu'on élève cette équation au carré, on obtient la formule de Héron :

$$16x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

JOHNNY JOHNSON

porte quel polyèdre. Puis, en 1997, l'équipe de trois mathématiciens simplifia considérablement cet algorithme. Pour un octaèdre – un solide à huit faces triangulaires –, la formule est une équation polynomiale qui contient le volume élevé à la puissance 16. Pour des polyèdres plus compliqués, les puissances sont encore supérieures.

L'existence d'une relation polynomiale pour n'importe quel polyèdre est étonnante, car, dans le plan, il n'existe pas d'équivalent de la formule de Héron qui s'appliquerait à tous les polygones. R. Connelly et I. Sabitov pensent savoir prouver la conjecture du soufflet dans un espace à quatre dimensions, mais pas à cinq dimensions. Et là, il n'est plus question de plier du papier pour se faire une idée des résultats !

RÉACTIONS

En réponse à l'article *Us et charmes des dés* (voir *Pour la Science*, mars 1998), plusieurs lecteurs m'ont indiqué d'autres ensembles de dés non transitifs. Le dé A est marqué 3, 3, 4, 4, 8, 8 ; le dé B, 1, 1, 5, 5, 9, 9 ; et le dé C, 6, 6, 7, 7, 2, 2. En moyenne, le dé B bat A cinq fois sur neuf, C bat B cinq fois sur neuf et A bat C cinq fois sur neuf. George Trepal, de Floride, fait remarquer que ces nombres arrangés correctement forment les colonnes d'un carré magique (voir ci-dessous), où la somme des nombres de chaque ligne ou de chaque colonne est égale à 15. De surcroît, si l'on utilise les nombres des lignes pour former les faces des dés, l'ensemble de dés obtenus – A (8, 8, 1, 1, 6, 6) ; B (3, 3, 5, 5, 7, 7) ; et C (4, 4, 9, 9, 2, 2) – est également non transitif : A bat B, B bat C et C bat A, avec des probabilités égales à 5/9. Des ensembles de dés similaires, construits à partir de carrés magiques plus grands, semblent ne pas avoir cette propriété de non-transitivité. Cette proposition peut-elle être montrée ou infirmée ?

Le meilleur ensemble de dés non transitifs proposé par G. Trepal, c'est-à-dire celui qui utilise les nombres les plus petits, a des faces marquées de la façon suivante : A (1, 1, 4, 4, 4, 4) ; B (3, 3, 3, 3, 3, 3) ; et C (2, 2, 2, 5, 5). Dans ce cas, A bat B avec une probabilité 6/9, B bat C avec une probabilité 6/9 et C bat A avec une probabilité 5/9.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

JOHNNY JOHNSON