



Michael J. Howell - Haquai

# Les martingales et autres illusions

JEAN-PAUL DELAHAYE

*Au casino, on peut gagner presque certainement... en risquant beaucoup!*

Un de mes amis, passionné de jeux de casino, prétendait qu'il est possible de gagner à la roulette. Je lui ai dit qu'il avait tort parce qu'il est mathématiquement démontré qu'on ne pouvait gagner. Quelle ne fut pas ma surprise lorsqu'il m'a rétorqué :

«Celui qui joue jusqu'à ne plus rien avoir va tout perdre. Il y a donc une façon (au moins) de mal jouer au casino. Mais alors, il y a certainement aussi une façon de bien jouer.»

Je suis resté interloqué et je n'ai pas su lui répondre sur le coup. J'ai l'esprit de l'escalier, aussi je lui réponds ici.

## RÈGLES ET PROBABILITÉS

Dans n'importe quel jeu, à chaque fois que l'on mise, il existe une probabilité  $p$  de gagner et une probabilité  $q$  de perdre sa mise. Il est certain que, soit on gagne, soit on perd! Aussi la somme  $p + q$  est-elle égale à 1, et  $q$  est égal à  $1 - p$ . Supposons que, comme à pile ou face, celui qui gagne récupère sa mise plus une somme égale à sa mise ; quand on perd, on laisse sa mise à l'autre joueur, que nous dénommerons *la banque*. Dans les casinos, des jeux de ce type, tels le rouge et le noir à la roulette, donnent aux parieurs une chance de gagner inférieure à 1/2. Le jeu n'est alors pas équitable, et l'on soupçonne que c'est pourquoi les casinos sont des entreprises rentables. Nous verrons dans ce qui suit que la rentabilité des casinos sur le long terme est garantie par les mathématiques.

Quelle est la probabilité  $p$  des jeux qu'on vous propose? Si vous trouvez un

ami qui accepte de faire la banque et que vous jouez à pile ou face avec une pièce non truquée, votre probabilité  $p$  de gain est égale à 1/2. C'est la même probabilité que si vous jouiez sur une couleur à une roulette équitable. À la *roulette simple* (dont l'invention est attribuée à Pascal et qui a été introduite à Paris en 1765), si vous jouez sur noir, vous gagnez quand l'un des 18 numéros noirs sort ; vous perdez quand l'un des 18 numéros rouges sort et quand le zéro (qui est vert) sort. Ainsi la probabilité de gain  $p$  est égale à 18/37, soit 0,4864..., car il y a 37 numéros de 0 à 36. À la *roulette française*, la règle est un peu plus compliquée, car quand le zéro sort votre mise reste *prisonnière* jusqu'à ce qu'un prochain lancement de la bille vous la fasse perdre ou récupérer (sans gain), et votre pro-

babilité de gain  $p$  est égale à 36/73, soit 0,4931... (voir l'explication de ce 36/73 dans l'encadré 1). À la *roulette américaine*, il y a un zéro et un double zéro verts, tous les deux favorables à la banque, sans système de mises prisonnières. Votre probabilité de gain  $p$  est de 18/38, soit 0,4736... Il existe aussi une *roulette mexicaine*, avec un triple zéro, correspondant à un  $p = 18/39 = 0,4615$ , mais c'est pour les *gringos*.

Pour calculer le gain de la banque, imaginons que 100 francs sont misés sur le noir et comptabilisons ce que, en moyenne, la banque perd (c'est-à-dire paie) et gagne. Dans une proportion de  $p$  cas, elle perd 100 francs ; dans une proportion de  $1 - p$  cas, elle gagne 100 francs. Aussi la banque gagne en moyenne :  $100(1 - p) - 100p$  francs, soit  $100(1 - 2p)$  francs, que l'on appelle parfois *l'espérance mathématique* de gain de la banque pour 100 francs misés. Dès que  $p$  est inférieur à 1/2, alors  $1 - 2p$  est positif, et donc la banque gagne en moyenne.

Ce gain moyen de la banque pour 100 francs misés est de 0 franc à pile ou face (ce jeu n'est pas proposé dans les casinos!) ; de 1,36 franc à la roulette française (avec système des mises prisonnières) ; de 2,70 francs pour la roulette simple, de 5,26 francs pour la roulette américaine ; de 7,69 francs pour la mexicaine.

Est-il possible, par un comportement rusé, de contourner ce gain théorique moyen de la banque et de le retourner en sa faveur? La question est historique : l'idée d'étudier par la théorie des probabilités les meilleures façons de jouer

### 1. LES RÈGLES DE LA ROULETTE FRANÇAISE

Il y a 37 numéros (de 0 à 36). Une bille lancée par le croupier sur une sorte de disque (appelé cylindre) qui tourne et comporte des encoches où la bille se stabilise (sur un numéro). Les *chances simples* sont *pair* (le 0 n'est pas considéré comme pair!), *impair*, *pas* (de 19 à 36), *manque* (de 1 à 18), *rouge* (1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36), *noir* (les autres numéros, sauf zéro, qui est vert). Si on joue une *chance simple* et qu'elle tombe, on récupère sa mise accompagnée d'un gain équivalent payé par la banque. Si elle ne tombe pas, on perd sa mise, sauf si c'est le zéro qui tombe, auquel cas la mise est *prisonnière* ; il faut alors attendre le coup suivant qui, soit permet de la récupérer (sans gain) si la chance simple choisie tombe, soit la fait perdre. Si le zéro tombe à nouveau, la mise reste prisonnière, etc.

Quand le zéro tombe, il y a symétrie entre les deux hypothèses : récupérer sa mise ou la perdre, et donc on a une chance sur deux de récupérer sa mise (sans gain) et une chance sur deux de la perdre. Donc, dans 1 cas sur 74, la partie ne compte pas (zéro, puis récupération de la mise) ; dans 1 cas sur 74, la mise est perdue (un zéro, puis perte de la mise) ; dans 18 cas sur 74, gain immédiat.

En éliminant le cas où la partie ne compte pas, la probabilité de gagner est 36/73.

Si l'on met sa mise sur un «numéro plein» et qu'il sort, on gagne 36 fois sa mise. Si on utilise autre chose que les chances simples, il n'y a pas de système de mises prisonnières, et donc la part prise par la banque est plus forte : 1/37 (au lieu de 1/73).

n'est pas récente. Pascal, d'Alembert, Moivre, Lagrange, Laplace et bien d'autres mathématiciens, parmi les plus éminents, s'y sont intéressés. Si de nombreux résultats ont été obtenus très tôt, même en ce siècle, des principes nouveaux permettent de mieux comprendre les stratégies de jeu à la roulette. Pour comparer les différentes méthodes de jeu, dénommées martingales, nous nous plaçons dans la peau d'un joueur qui, au départ, a un capital de A francs et qui veut partir du casino dès qu'il a B francs. Comment doit-il s'y prendre en jouant sur le noir et le rouge ?

## LA STRATÉGIE DES MISES CONSTANTES

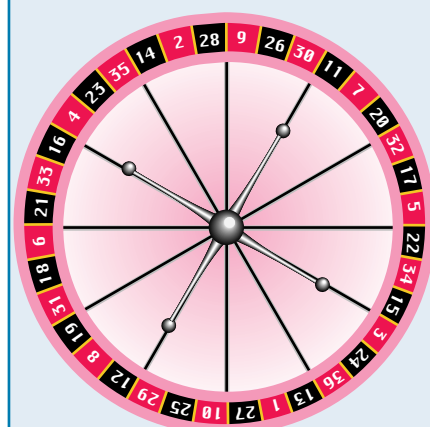
La stratégie des mises constantes consiste à jouer K francs à la fois jusqu'à, soit avoir perdu son capital de A francs, soit avoir atteint l'objectif des B francs. Cette martingale est élémentaire, pourtant nombre de gens l'utilisent.

Comment fixer la valeur de K ? Faut-il jouer 1 franc à chaque fois, ou 5 francs, ou 10 francs ? Pour répondre à cette question, deux techniques sont envisageables : la simulation informatique et l'étude mathématique (nous avons exclu l'essai dans

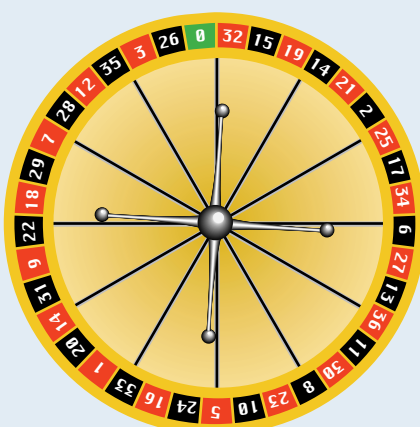
un casino, car nous ne sommes ni assez riches... ni assez patients).

C'est seulement depuis que nous disposons de machines puissantes et faciles à programmer que nous pouvons mener les simulations qui *de facto* étaient interdites aux mathématiciens avant 1945, date de la mise au point des premiers calculateurs électroniques. Comme de nombreux problèmes complexes ne pouvaient être résolus par le raisonnement, les calculateurs électroniques furent, dès leur conception, utilisés pour calculer la probabilité de succès de certaines patiences. Dans ces simulations, où sont incluses

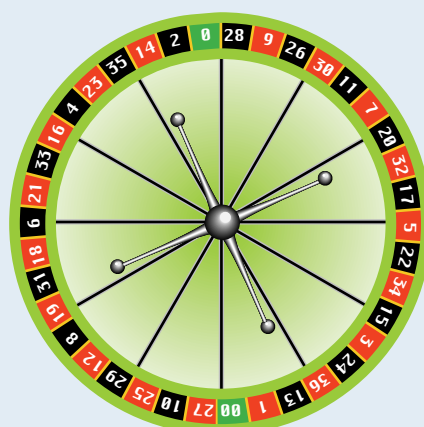
### 2. PROBABILITÉS DE GAIN SELON LES MARTINGALES ET LES MISES POUR TROIS ROULETTES ET UNE FORTUNE INITIALE DE 10 FRANCS



ROULETTE ÉQUITABLE OU JEU DE PILE OU FACE  
 $p = 1/2$



ROULETTE FRANÇAISE AVEC MISES PRISONNIÈRES  
 $p = 36/73 = 0,4931$



ROULETTE AMÉRICAINNE  
 $p = 18/38 = 0,4736$

|                     | MISES  |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|
|                     | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :   |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,9125 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,4998 | 0,4998 | 0,4995 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,0974 | 0,0994 | 0,1001 |

| STRATÉGIE DE MISES CONSTANTES |        |        |        |
|-------------------------------|--------|--------|--------|
|                               | MISES  |        |        |
|                               | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :             |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %                | 0,8956 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE            | 0,4433 | 0,4879 | 0,4920 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE           | 0,0222 | 0,0773 | 0,0876 |

|                     | MISES  |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|
|                     | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :   |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,8550 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,2619 | 0,4485 | 0,4754 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,0002 | 0,0323 | 0,0615 |

|                     | MISES  |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|
|                     | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :   |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,9080 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,5042 | 0,5018 | 0,5012 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,1021 | 0,1009 | 0,1018 |

| MARTINGALE DE D'ALEMBERT |        |        |        |
|--------------------------|--------|--------|--------|
|                          | MISES  |        |        |
|                          | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :        |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %           | 0,9040 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE       | 0,4826 | 0,4854 | 0,4921 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE      | 0,0789 | 0,0811 | 0,0845 |

|                     | MISES  |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|
|                     | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :   |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,8858 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,4246 | 0,4400 | 0,4739 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,0356 | 0,0372 | 0,0479 |

|                     | MISES  |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|
|                     | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :   |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,9100 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,4964 | 0,5003 | 0,4986 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,0990 | 0,0997 | 0,0994 |

| MARTINGALE GÉOMÉTRIQUE |        |        |        |
|------------------------|--------|--------|--------|
|                        | MISES  |        |        |
|                        | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :      |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %         | 0,9003 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE     | 0,4784 | 0,4908 | 0,4950 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE    | 0,0808 | 0,0908 | 0,0917 |

|                     | MISES  |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|
|                     | 1 F    | 5 F    | 10 F   |
| PROBABILITÉS DE :   |        |        |        |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,8866 |        |        |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,4192 | 0,4558 | 0,4743 |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,0450 | 0,0623 | 0,0710 |

|                     | JEU HARDI            |                  |
|---------------------|----------------------|------------------|
|                     | VALEUR EXPÉRIMENTALE | VALEUR THÉORIQUE |
| PROBABILITÉS DE :   |                      |                  |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,9087               | 0,9091           |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,5018               | 0,5              |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,1011               | 0,1              |

|                     | JEU HARDI            |                  |
|---------------------|----------------------|------------------|
|                     | VALEUR EXPÉRIMENTALE | VALEUR THÉORIQUE |
| PROBABILITÉS DE :   |                      |                  |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,9038               | 0,9042           |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,4932               | 0,4931           |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,0954               | 0,0950           |

|                     | JEU HARDI            |                  |
|---------------------|----------------------|------------------|
|                     | VALEUR EXPÉRIMENTALE | VALEUR THÉORIQUE |
| PROBABILITÉS DE :   |                      |                  |
| 1) GAGNER 10 %      | 0,8901               | 0,8896           |
| 2) DOUBLER SA MISE  | 0,4736               | 0,4736           |
| 3) DÉCUPLER SA MISE | 0,0820               | 0,0819           |