

n'est pas récente. Pascal, d'Alembert, Moivre, Lagrange, Laplace et bien d'autres mathématiciens, parmi les plus éminents, s'y sont intéressés. Si de nombreux résultats ont été obtenus très tôt, même en ce siècle, des principes nouveaux permettent de mieux comprendre les stratégies de jeu à la roulette. Pour comparer les différentes méthodes de jeu, dénommées martingales, nous nous plaçons dans la peau d'un joueur qui, au départ, a un capital de A francs et qui veut partir du casino dès qu'il a B francs. Comment doit-il s'y prendre en jouant sur le noir et le rouge ?

LA STRATÉGIE DES MISES CONSTANTES

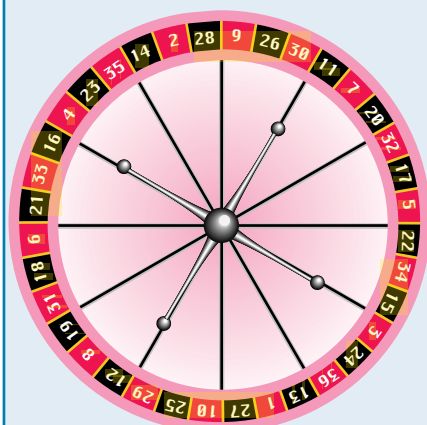
La stratégie des mises constantes consiste à jouer K francs à la fois jusqu'à, soit avoir perdu son capital de A francs, soit avoir atteint l'objectif des B francs. Cette martingale est élémentaire, pourtant nombre de gens l'utilisent.

Comment fixer la valeur de K ? Faut-il jouer 1 franc à chaque fois, ou 5 francs, ou 10 francs ? Pour répondre à cette question, deux techniques sont envisageables : la simulation informatique et l'étude mathématique (nous avons exclu l'essai dans

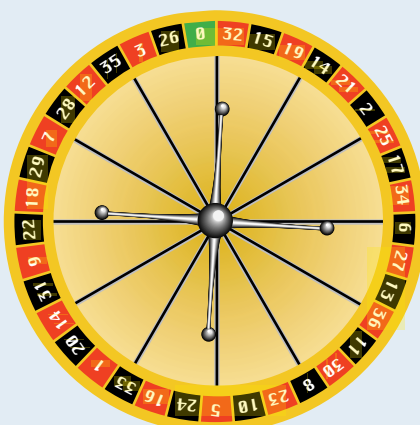
un casino, car nous ne sommes ni assez riches... ni assez patients).

C'est seulement depuis que nous disposons de machines puissantes et faciles à programmer que nous pouvons mener les simulations qui *de facto* étaient interdites aux mathématiciens avant 1945, date de la mise au point des premiers calculateurs électroniques. Comme de nombreux problèmes complexes ne pouvaient être résolus par le raisonnement, les calculateurs électroniques furent, dès leur conception, utilisés pour calculer la probabilité de succès de certaines patiences. Dans ces simulations, où sont incluses

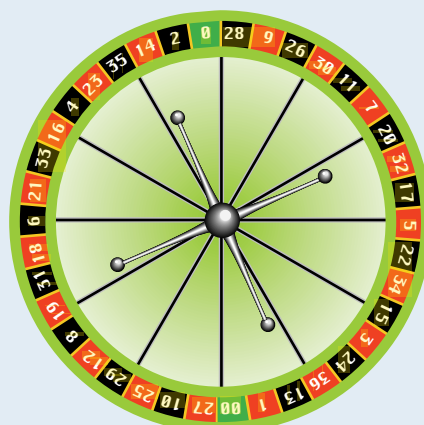
2. PROBABILITÉS DE GAIN SELON LES MARTINGALES ET LES MISES POUR TROIS ROULETTES ET UNE FORTUNE INITIALE DE 10 FRANCS



ROULETTE ÉQUITABLE OU JEU DE PILE OU FACE
 $p = 1/2$



ROULETTE FRANÇAISE AVEC MISES PRISONNIÈRES
 $p = 36/73 = 0,4931$



ROULETTE AMÉRICAINNE
 $p = 18/38 = 0,4736$

PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,9125		
2) DOUBLER SA MISE	0,4998	0,4998	0,4995
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0974	0,0994	0,1001

STRATÉGIE DE MISES CONSTANTES			
PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,8956		
2) DOUBLER SA MISE	0,4433	0,4879	0,4920
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0222	0,0773	0,0876

PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,8550		
2) DOUBLER SA MISE	0,2619	0,4485	0,4754
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0002	0,0323	0,0615

PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,9080		
2) DOUBLER SA MISE	0,5042	0,5018	0,5012
3) DÉCUPLER SA MISE	0,1021	0,1009	0,1018

MARTINGALE DE D'ALEMBERT			
PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,9040		
2) DOUBLER SA MISE	0,4826	0,4854	0,4921
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0789	0,0811	0,0845

PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,8858		
2) DOUBLER SA MISE	0,4246	0,4400	0,4739
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0356	0,0372	0,0479

PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,9100		
2) DOUBLER SA MISE	0,4964	0,5003	0,4986
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0990	0,0997	0,0994

MARTINGALE GÉOMÉTRIQUE			
PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,9003		
2) DOUBLER SA MISE	0,4784	0,4908	0,4950
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0808	0,0908	0,0917

PROBABILITÉS DE :	MISES		
	1 F	5 F	10 F
1) GAGNER 10 %	0,8866		
2) DOUBLER SA MISE	0,4192	0,4558	0,4743
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0450	0,0623	0,0710

PROBABILITÉS DE :	VALEUR EXPÉRIMENTALE	VALEUR THÉORIQUE
1) GAGNER 10 %	0,9087	0,9091
2) DOUBLER SA MISE	0,5018	0,5
3) DÉCUPLER SA MISE	0,1011	0,1

JEU HARDI			
PROBABILITÉS DE :	VALEUR EXPÉRIMENTALE	VALEUR THÉORIQUE	
1) GAGNER 10 %	0,9038	0,9042	
2) DOUBLER SA MISE	0,4932	0,4931	
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0954	0,0950	

PROBABILITÉS DE :	VALEUR EXPÉRIMENTALE	VALEUR THÉORIQUE
1) GAGNER 10 %	0,8901	0,8896
2) DOUBLER SA MISE	0,4736	0,4736
3) DÉCUPLER SA MISE	0,0820	0,0819

3. DEUX ARNAQUES AU CASINO

Les mises en défaut des casinos sont rares, et d'autant plus succulentes. Elles illustrent la devise de droit romain : *Nemo auditur suam turpitudinem allegans*. Nul ne peut alléguer (pour se justifier) sa propre turpitude.

La première est plus juridique que scientifique. Un joueur regardait la table de la roulette depuis un certain temps, lorsqu'il tendit un billet au croupier : «Je vous donne la mise que j'ai perdue, assura-t-il, j'ai joué mentalement le cinq et il n'est pas sorti.» Le croupier accepta la mise. Quelques instants plus tard, le même joueur apostropha le croupier : «J'ai joué dans ma tête le huit, qui vient de sortir. Vous me devez trente-six fois ma mise.» L'histoire raconte que le casino dut s'exécuter : le croupier ayant accepté la première mise «mentale», il devait payer la seconde.

La seconde nécessitait une mise en scène plus subtile. Un joueur vint trois jours de suite, en Rolls pour donner confiance, avec son valet, jouer à la roulette. Il misait sur le rouge jusqu'à ce qu'il perde 100 000 francs, puis s'en allait. Le quatrième jour, son valet vint seul et demanda à s'entretenir avec le directeur du casino. «Mon maître est malade, et je dois jouer tous les jours 100 000 francs sur le rouge. Bien sûr, je vais perdre, aussi j'entends que vous me dédommiez de 50 000 francs. Ainsi, nous gagnerons tous les deux 50 000 francs.» Le directeur du casino accepta. Il ignorait qu'un baron, de mèche avec le valet, jouait le noir quand son compère jouait le rouge, et chacun gagnait quand l'autre perdait. Ainsi le casino ne gagnait rien à la table de jeu, et nos escrocs étaient certains d'y équilibrer à peu près leurs gains et leurs pertes (car il faut compter les cas où la bille tombait sur le 0 et où tous les deux perdaient) ; ils étaient assurés de gagner à peu près la somme de 50 000 francs versée par le casino.

les règles de la patience, le programme tire aléatoirement des configurations de départ et dénombre ensuite succès et échecs, donc la probabilité de gain.

Examinons trois objectifs concrets :

- (a) passer de $A = 10$ francs à $B = 100$ francs (décupler son capital initial)
- (b) passer de $A = 10$ francs à $B = 20$ francs (doubler son capital)
- (c) passer de $A = 10$ francs à $B = 11$ francs (augmenter son capital de 10 pour cent)

Les mises jouées à chaque fois seront soit 1 franc, soit 5 francs, soit 10 francs.

Les résultats des simulations informatiques sont indiqués dans le tableau de l'encadré 2 pour le jeu de pile ou face (ou une roulette honnête), la roulette française et la roulette américaine. Chaque évaluation représente 50 000 essais (ce qui, à raison d'un essai toutes les cinq minutes, 12 heures par jour, correspond à plus d'un an de jeu en salle pour chaque case des tableaux).

Ici les simulations ne sont pas indispensables, car ce problème a une solution mathématique, découverte dans un cas particulier par Huygens en 1657, généralisée par Bernoulli en 1680, puis précisée par Moivre en 1711. Lorsque p est égal à $1/2$ et la mise égale à K , la probabilité de réussir est A/B ; lorsque p est inférieure à $1/2$, elle est de $[1 - (q/p)^{A/K}] / [1 - (q/p)^{B/K}]$

Ainsi, plus p est petit, moins vous réussirez ; ce n'est pas une surprise !

Plus B/A est grand (plus vous êtes gourmand), moins vous avez de chances de réussir ; ce n'est pas étonnant non plus.

Toutefois, lorsque p est fixé, vous maximisez vos chances de réussite en prenant K le plus grand possible. Ce résultat n'est pas évident ! Pour décupler votre fortune et passer de 10 à 100 francs en utilisant la stratégie des mises constantes, il vaut mieux miser 10 francs à chaque tirage que 5 francs, et il est plus avantageux de miser 5 francs que 1 franc.

Si l'on compare les résultats théoriques donnés par la formule de Huygens-Bernoulli-Moivre avec ceux de nos simulations réalisées en faisant 50 000 essais, on remarque que seuls deux chiffres donnés par l'expérimentation sont fiables.

LOI DE LA RUINE CERTAINE

Lorsque deux joueurs s'affrontent jusqu'à ce que l'un d'eux soit ruiné, l'un des deux joueurs finit nécessairement par perdre (même si p est égal à $1/2$ et qu'ils disposent tous deux de la même somme initiale). C'est ce qu'on appelle la loi de la ruine certaine. Si les fortunes sont inégales, la formule de Huygens-Bernoulli-Moivre montre que celui qui a la plus grande fortune gagnera plus souvent («l'argent va à l'argent»), en particulier dans le cas p égal à $1/2$, la probabilité que le joueur 1 gagne est égale à :

$$\text{Fortune du joueur 1}$$

(Fortune du joueur 1 + Fortune du joueur 2)

Si vous affrontez un joueur deux fois plus riche, il a 2 fois plus de chances de gagner que vous ; s'il est cent fois plus riche il gagnera 100 fois sur 101 ; si vous affrontez un joueur infiniment riche, vous

êtes certain de tout perdre, même lorsque le jeu est équitable. La durée moyenne d'une partie où votre fortune de départ est N francs contre un joueur infiniment riche (le casino), c'est-à-dire le nombre de mises de 1 franc que vous jouez avant d'avoir tout perdu est égale à $N/(p-q)$; à la roulette française, si vous jouez par 10 francs, il faudra en moyenne 730 coups pour que vous soyez ruiné. Lorsqu'un jeu est en votre faveur, p supérieur à $1/2$, même si vous affrontez un joueur infiniment riche avec une somme de départ finie, vous deviendrez infiniment riche dans une bonne proportion de cas.

Les tableaux et les résultats mathématiques montrent qu'avec p inférieur à $1/2$ les chances de réussir à doubler son capital sont inférieures à $1/2$. La stratégie des mises constantes n'est pas assez astucieuse pour renverser l'avantage initial du casino, il faut essayer autre chose.

LA MARTINGALE DE D'ALEMBERT

Le nom du procédé de jeu suivant ne signifie pas que d'Alembert a cru qu'il s'agissait d'une méthode permettant de gagner.

Martingale de d'Alembert (ou montante de d'Alembert) : la mise initiale est de K francs ; ensuite, à chaque fois que vous gagnez, vous diminuez votre mise de K francs (parce que vous pensez que la chance vient de vous être favorable, et qu'elle risque de l'être moins le coup suivant), et à chaque fois que vous perdez vous l'augmentez de K francs (la chance devrait maintenant mieux vous servir, croyez-vous).

Lorsque la règle conduit à miser 0 franc, on ne diminue pas la mise, qui reste donc K francs. Lorsque nous sommes près du but, nous ne misons pas plus qu'il n'est nécessaire pour l'atteindre : si, par exemple, lorsque l'objectif est 100 francs, la règle de d'Alembert nous conduit à 98 francs et nous suggère de miser 6 francs, nous ne jouons que 2 francs. Pour chaque résultat, 50 000 essais ont été faits ; les résultats sont donnés dans l'encadré 2.

Là encore, plus p est favorable à la banque, moins on réussit souvent. Ensuite, dans le cas p égal à $1/2$, les simulations retrouvent approximativement les valeurs calculées pour les mises constantes (les écarts par rapport aux valeurs théoriques, $1/10$, $1/2$ et $10/11$ ne sont pas significatifs). Cela se déduit d'un résultat théorique remarquable qui indique que, dans le cas p égal à $1/2$, pour passer de A francs à B francs, toutes les stratégies se valent. Si p est égal à $1/2$, quoi que vous fassiez vous réussirez A fois sur B , ni plus souvent, ni moins souvent.

Troisième résultat : comme dans le cas des mises constantes, on augmente