

3. DEUX ARNAQUES AU CASINO

Les mises en défaut des casinos sont rares, et d'autant plus succulentes. Elles illustrent la devise de droit romain : *Nemo auditur suam turpitudinem allegans*. Nul ne peut alléguer (pour se justifier) sa propre turpitude.

La première est plus juridique que scientifique. Un joueur regardait la table de la roulette depuis un certain temps, lorsqu'il tendit un billet au croupier : «Je vous donne la mise que j'ai perdue, assura-t-il, j'ai joué mentalement le cinq et il n'est pas sorti.» Le croupier accepta la mise. Quelques instants plus tard, le même joueur apostropha le croupier : «J'ai joué dans ma tête le huit, qui vient de sortir. Vous me devez trente-six fois ma mise.» L'histoire raconte que le casino dut s'exécuter : le croupier ayant accepté la première mise «mentale», il devait payer la seconde.

La seconde nécessitait une mise en scène plus subtile. Un joueur vint trois jours de suite, en Rolls pour donner confiance, avec son valet, jouer à la roulette. Il misait sur le rouge jusqu'à ce qu'il perde 100 000 francs, puis s'en allait. Le quatrième jour, son valet vint seul et demanda à s'entretenir avec le directeur du casino. «Mon maître est malade, et je dois jouer tous les jours 100 000 francs sur le rouge. Bien sûr, je vais perdre, aussi j'entends que vous me dédommiez de 50 000 francs. Ainsi, nous gagnerons tous les deux 50 000 francs.» Le directeur du casino accepta. Il ignorait qu'un baron, de mèche avec le valet, jouait le noir quand son compère jouait le rouge, et chacun gagnait quand l'autre perdait. Ainsi le casino ne gagnait rien à la table de jeu, et nos escrocs étaient certains d'y équilibrer à peu près leurs gains et leurs pertes (car il faut compter les cas où la bille tombait sur le 0 et où tous les deux perdaient) ; ils étaient assurés de gagner à peu près la somme de 50 000 francs versée par le casino.

les règles de la patience, le programme tire aléatoirement des configurations de départ et dénombre ensuite succès et échecs, donc la probabilité de gain.

Examinons trois objectifs concrets :

- (a) passer de $A = 10$ francs à $B = 100$ francs (décupler son capital initial)
- (b) passer de $A = 10$ francs à $B = 20$ francs (doubler son capital)
- (c) passer de $A = 10$ francs à $B = 11$ francs (augmenter son capital de 10 pour cent)

Les mises jouées à chaque fois seront soit 1 franc, soit 5 francs, soit 10 francs.

Les résultats des simulations informatiques sont indiqués dans le tableau de l'encadré 2 pour le jeu de pile ou face (ou une roulette honnête), la roulette française et la roulette américaine. Chaque évaluation représente 50 000 essais (ce qui, à raison d'un essai toutes les cinq minutes, 12 heures par jour, correspond à plus d'un an de jeu en salle pour chaque case des tableaux).

Ici les simulations ne sont pas indispensables, car ce problème a une solution mathématique, découverte dans un cas particulier par Huygens en 1657, généralisée par Bernoulli en 1680, puis précisée par Moivre en 1711. Lorsque p est égal à $1/2$ et la mise égale à K , la probabilité de réussir est A/B ; lorsque p est inférieure à $1/2$, elle est de $[1 - (q/p)^{A/K}] / [1 - (q/p)^{B/K}]$

Ainsi, plus p est petit, moins vous réussirez ; ce n'est pas une surprise !

Plus B/A est grand (plus vous êtes gourmand), moins vous avez de chances de réussir ; ce n'est pas étonnant non plus.

Toutefois, lorsque p est fixé, vous maximisez vos chances de réussite en prenant K le plus grand possible. Ce résultat n'est pas évident ! Pour décupler votre fortune et passer de 10 à 100 francs en utilisant la stratégie des mises constantes, il vaut mieux miser 10 francs à chaque tirage que 5 francs, et il est plus avantageux de miser 5 francs que 1 franc.

Si l'on compare les résultats théoriques donnés par la formule de Huygens-Bernoulli-Moivre avec ceux de nos simulations réalisées en faisant 50 000 essais, on remarque que seuls deux chiffres donnés par l'expérimentation sont fiables.

LOI DE LA RUINE CERTAINE

Lorsque deux joueurs s'affrontent jusqu'à ce que l'un d'eux soit ruiné, l'un des deux joueurs finit nécessairement par perdre (même si p est égal à $1/2$ et qu'ils disposent tous deux de la même somme initiale). C'est ce qu'on appelle la loi de la ruine certaine. Si les fortunes sont inégales, la formule de Huygens-Bernoulli-Moivre montre que celui qui a la plus grande fortune gagnera plus souvent («l'argent va à l'argent»), en particulier dans le cas p égal à $1/2$, la probabilité que le joueur 1 gagne est égale à :

$$\text{Fortune du joueur 1}$$

(Fortune du joueur 1 + Fortune du joueur 2)

Si vous affrontez un joueur deux fois plus riche, il a 2 fois plus de chances de gagner que vous ; s'il est cent fois plus riche il gagnera 100 fois sur 101 ; si vous affrontez un joueur infiniment riche, vous

êtes certain de tout perdre, même lorsque le jeu est équitable. La durée moyenne d'une partie où votre fortune de départ est N francs contre un joueur infiniment riche (le casino), c'est-à-dire le nombre de mises de 1 franc que vous jouez avant d'avoir tout perdu est égale à $N/(p-q)$; à la roulette française, si vous jouez par 10 francs, il faudra en moyenne 730 coups pour que vous soyez ruiné. Lorsqu'un jeu est en votre faveur, p supérieur à $1/2$, même si vous affrontez un joueur infiniment riche avec une somme de départ finie, vous deviendrez infiniment riche dans une bonne proportion de cas.

Les tableaux et les résultats mathématiques montrent qu'avec p inférieur à $1/2$ les chances de réussir à doubler son capital sont inférieures à $1/2$. La stratégie des mises constantes n'est pas assez astucieuse pour renverser l'avantage initial du casino, il faut essayer autre chose.

LA MARTINGALE DE D'ALEMBERT

Le nom du procédé de jeu suivant ne signifie pas que d'Alembert a cru qu'il s'agissait d'une méthode permettant de gagner.

Martingale de d'Alembert (ou montante de d'Alembert) : la mise initiale est de K francs ; ensuite, à chaque fois que vous gagnez, vous diminuez votre mise de K francs (parce que vous pensez que la chance vient de vous être favorable, et qu'elle risque de l'être moins le coup suivant), et à chaque fois que vous perdez vous l'augmentez de K francs (la chance devrait maintenant mieux vous servir, croyez-vous).

Lorsque la règle conduit à miser 0 franc, on ne diminue pas la mise, qui reste donc K francs. Lorsque nous sommes près du but, nous ne misons pas plus qu'il n'est nécessaire pour l'atteindre : si, par exemple, lorsque l'objectif est 100 francs, la règle de d'Alembert nous conduit à 98 francs et nous suggère de miser 6 francs, nous ne jouons que 2 francs. Pour chaque résultat, 50 000 essais ont été faits ; les résultats sont donnés dans l'encadré 2.

Là encore, plus p est favorable à la banque, moins on réussit souvent. Ensuite, dans le cas p égal à $1/2$, les simulations retrouvent approximativement les valeurs calculées pour les mises constantes (les écarts par rapport aux valeurs théoriques, $1/10$, $1/2$ et $10/11$ ne sont pas significatifs). Cela se déduit d'un résultat théorique remarquable qui indique que, dans le cas p égal à $1/2$, pour passer de A francs à B francs, toutes les stratégies se valent. Si p est égal à $1/2$, quoi que vous fassiez vous réussirez A fois sur B , ni plus souvent, ni moins souvent.

Troisième résultat : comme dans le cas des mises constantes, on augmente

ses chances avec des valeurs de K croissantes. Pour p égal à 18/38, par exemple, selon que vous partez de K égal à 1 franc, K égal à 5 francs, ou K égal à 10 francs, votre probabilité de réussite passe de 3,56 pour cent à 3,72 pour cent, puis à 4,79 pour cent.

Lorsque p est inférieur à 1/2, des stratégies de jeu essayées pour l'instant, c'est la stratégie de d'Alembert avec K égal à 10 qui est la meilleure.

Peut-on améliorer la probabilité de décupler, doubler ou augmenter de 10 pour cent votre fortune initiale ?

LA MARTINGALE GÉOMÉTRIQUE

La martingale géométrique est la plus populaire de toutes, tant son principe est simple et, à première vue, infaillible. C'est *La martingale*. On commence par miser K francs ; si on perd, on double la mise, et on la double ainsi jusqu'à ce que l'on gagne. Lorsque cela arrive, on a perdu $K + 2K + 4K + \dots + 2^{n-1}K$ et on a gagné $2^n K$, donc on a gagné K francs. On recommence alors tout, avec une mise de K francs.

Exemple : vous misez 1 franc, vous perdez ; vous misez alors 2 francs, vous perdez ; vous misez alors 4 francs, vous gagnez. Au total, vous avez gagné 4 francs et perdu 3 francs, ce qui donne un bilan positif de 1 franc.

Si l'on pouvait ainsi toujours doubler, on gagnerait K francs à chaque série et, petit à petit, on accumulerait tout l'argent que l'on veut. Cherchez l'erreur.

Elle est double. D'abord, quand on n'a plus rien, on ne peut plus miser ; or il arrive qu'il y ait de longues séquences de tirages identiques (le record dans une salle de casino est une série de 42 fois le rouge). Ensuite, les mises autorisées sont limitées (à 1 000 fois la mise la plus faible pour une table donnée dans les casinos français) et donc, même si vous êtes très riche, vous ne pourrez pas appliquer la martingale géométrique plus de 10 étapes.

Rendons-la praticable en précisant nos choix en cas de blocage. On double la mise précédente si on a perdu, tant que rien ne s'y oppose, mais si on peut atteindre l'objectif de B francs en misant moins que ce que la règle indique, on le fait, et si on n'a pas assez pour miser conformément à la règle, on met le maximum dont on dispose.

K est la mise initiale. Pour chaque résultat, 50 000 essais ont été faits. Là encore, les résultats sont donnés sur la figure 2. Si p est égal à 1/2, rien ne permet de dévier de A/B ; on vérifie, à nouveau, que la roulette américaine est bien plus productive que la roulette française (pour la banque, bien sûr!).

On découvre que la stratégie géométrique est meilleure que les deux autres méthodes de jeu envisagées auparavant, et qu'elle est meilleure pour K égal à 10 francs que pour K égal à 5 francs ou K égal à 1 franc.

Il semble que non seulement l'argent va aux riches, mais aussi qu'il va (ou reste, mieux!) à ceux qui misent plus gros! Les stratégies les plus violentes sont les meilleures. Plus grosse est la valeur de K , mieux c'est, et plus violente est la stratégie, mieux c'est (la géométrique est plus violente que la d'Alembert, elle-même plus violente que les mises constantes). Cette règle est-elle générale? Si oui, comment la formuler précisément?

Le fait que, pour p supérieur à 1/2, nous trouvions que la martingale de d'Alembert avec K égal à 1 est très légèrement meilleure pour doubler son capital que la géométrique avec K égal à 1 (seule exception numérique à la supériorité générale de la géométrique) ne contredit pas notre remarque générale, car, dans la d'Alembert avec K égal à 1, la baisse des mises se fait plus lentement que dans la géométrique (aussi avec K égal à 1) et conduit donc, en moyenne, à un comportement plus violent. La violence du comportement semble en toute généralité le bon comportement à ce jeu.

LE THÉORÈME DU JEU HARDI

Ce résultat général que tout le monde devrait connaître sera dénommé le théorème du Jeu hardi ou loi de Dubins et Savage (ils furent les premiers à l'établir, en 1956). Le précepte est moral, il faut passer le moins de temps possible devant le tapis vert.

Théorème du Jeu hardi. La meilleure façon de jouer dans un jeu à deux options de probabilités p et $1 - p$ avec p inférieur à 1/2, pour passer de A à B , consiste à miser toujours ce qui permet d'approcher le plus le but visé.

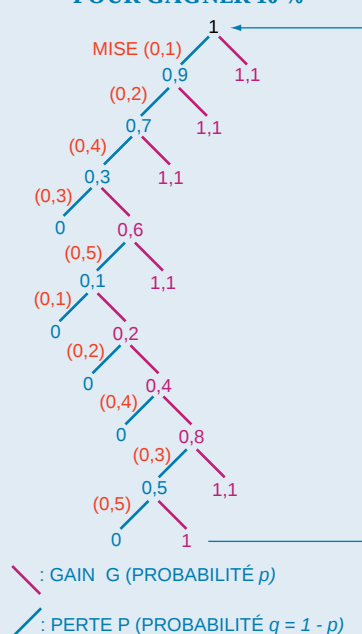
Toutes les méthodes de jeu, comme nous l'avions constaté par expérimentation, ne sont pas équivalentes. Mon ami avait raison sur un point : pour atteindre un but donné, il y a des stratégies meilleures que d'autres (ce qui ne veut pas dire qu'on peut gagner contre le casino).

Le théorème du Jeu hardi nous conduit à de meilleures stratégies que celles envisagées jusqu'à présent pour décupler, ou augmenter de 10 pour cent, notre capital. Si votre objectif est de décupler votre pécule (passer de A à $10A$), vous devez miser A la première fois (c'est le plus que vous pouvez faire) ; si vous avez gagné, misez $2A$, puis, si vous avez gagné, misez $4A$; puis finalement misez $3A$ (car cela vous suffit pour atteindre $10A$). Si vous perdez au dernier coup, vous vous trouvez avec $7A$, il vous manque $4A$, vous misez donc $4A$. Etc.

Cette stratégie ressemble à la martingale géométrique dans le cas où l'on prend K égal à A , mais elle ne lui est pas complètement équivalente, car lorsque vous venez de perdre, plutôt que de repartir de K (martingale géométrique), ici vous jouez ce qui est nécessaire pour atteindre l'objectif en un coup, si c'est possible.

Dans le cas de l'objectif du doublement du capital de 10 francs à 20 francs, la stratégie des mises constantes avec K égal à 10 francs et la martingale géométrique avec K égal à 10 francs sont identiques à

4. STRATÉGIE OPTIMALE POUR GAGNER 10 %



En suivant les divers chemins de gain, on voit que la probabilité de passer d'une somme à 1,1 fois cette somme est : probabilité de G (p) + probabilité de P puis G (qp) + probabilité de P puis P puis G (q^2p) + probabilité de P puis P puis P puis G (q^3p) + probabilité de P puis P puis P puis G (q^4p) + probabilité de P puis P puis P puis G (q^5p) puis boucler en revenant à 1, après simplification.

$$r = (p + qp + q^2p + q^3p + q^4p + q^5p) / (1 - q^5p)$$

Avec la stratégie du Jeu hardi à la roulette française ($p = 36/73$), si vous êtes prêt à risquer 1 000 F pour en gagner 100, vous réussirez dans 90,426 pour cent des cas.