

ses chances avec des valeurs de K croissantes. Pour p égal à 18/38, par exemple, selon que vous partez de K égal à 1 franc, K égal à 5 francs, ou K égal à 10 francs, votre probabilité de réussite passe de 3,56 pour cent à 3,72 pour cent, puis à 4,79 pour cent.

Lorsque p est inférieur à 1/2, des stratégies de jeu essayées pour l'instant, c'est la stratégie de d'Alembert avec K égal à 10 qui est la meilleure.

Peut-on améliorer la probabilité de décupler, doubler ou augmenter de 10 pour cent votre fortune initiale ?

LA MARTINGALE GÉOMÉTRIQUE

La martingale géométrique est la plus populaire de toutes, tant son principe est simple et, à première vue, infaillible. C'est *La martingale*. On commence par miser K francs ; si on perd, on double la mise, et on la double ainsi jusqu'à ce que l'on gagne. Lorsque cela arrive, on a perdu $K + 2K + 4K + \dots + 2^{n-1}K$ et on a gagné $2^n K$, donc on a gagné K francs. On recommence alors tout, avec une mise de K francs.

Exemple : vous misez 1 franc, vous perdez ; vous misez alors 2 francs, vous perdez ; vous misez alors 4 francs, vous gagnez. Au total, vous avez gagné 4 francs et perdu 3 francs, ce qui donne un bilan positif de 1 franc.

Si l'on pouvait ainsi toujours doubler, on gagnerait K francs à chaque série et, petit à petit, on accumulerait tout l'argent que l'on veut. Cherchez l'erreur.

Elle est double. D'abord, quand on n'a plus rien, on ne peut plus miser ; or il arrive qu'il y ait de longues séquences de tirages identiques (le record dans une salle de casino est une série de 42 fois le rouge). Ensuite, les mises autorisées sont limitées (à 1 000 fois la mise la plus faible pour une table donnée dans les casinos français) et donc, même si vous êtes très riche, vous ne pourrez pas appliquer la martingale géométrique plus de 10 étapes.

Rendons-la praticable en précisant nos choix en cas de blocage. On double la mise précédente si on a perdu, tant que rien ne s'y oppose, mais si on peut atteindre l'objectif de B francs en misant moins que ce que la règle indique, on le fait, et si on n'a pas assez pour miser conformément à la règle, on met le maximum dont on dispose.

K est la mise initiale. Pour chaque résultat, 50 000 essais ont été faits. Là encore, les résultats sont donnés sur la figure 2. Si p est égal à 1/2, rien ne permet de dévier de A/B ; on vérifie, à nouveau, que la roulette américaine est bien plus productive que la roulette française (pour la banque, bien sûr!).

On découvre que la stratégie géométrique est meilleure que les deux autres méthodes de jeu envisagées auparavant, et qu'elle est meilleure pour K égal à 10 francs que pour K égal à 5 francs ou K égal à 1 franc.

Il semble que non seulement l'argent va aux riches, mais aussi qu'il va (ou reste, mieux!) à ceux qui misent plus gros! Les stratégies les plus violentes sont les meilleures. Plus grosse est la valeur de K , mieux c'est, et plus violente est la stratégie, mieux c'est (la géométrique est plus violente que la d'Alembert, elle-même plus violente que les mises constantes). Cette règle est-elle générale? Si oui, comment la formuler précisément?

Le fait que, pour p supérieur à 1/2, nous trouvions que la martingale de d'Alembert avec K égal à 1 est très légèrement meilleure pour doubler son capital que la géométrique avec K égal à 1 (seule exception numérique à la supériorité générale de la géométrique) ne contredit pas notre remarque générale, car, dans la d'Alembert avec K égal à 1, la baisse des mises se fait plus lentement que dans la géométrique (aussi avec K égal à 1) et conduit donc, en moyenne, à un comportement plus violent. La violence du comportement semble en toute généralité le bon comportement à ce jeu.

LE THÉORÈME DU JEU HARDI

Ce résultat général que tout le monde devrait connaître sera dénommé le théorème du Jeu hardi ou loi de Dubins et Savage (ils furent les premiers à l'établir, en 1956). Le précepte est moral, il faut passer le moins de temps possible devant le tapis vert.

Théorème du Jeu hardi. La meilleure façon de jouer dans un jeu à deux options de probabilités p et $1 - p$ avec p inférieur à 1/2, pour passer de A à B , consiste à miser toujours ce qui permet d'approcher le plus le but visé.

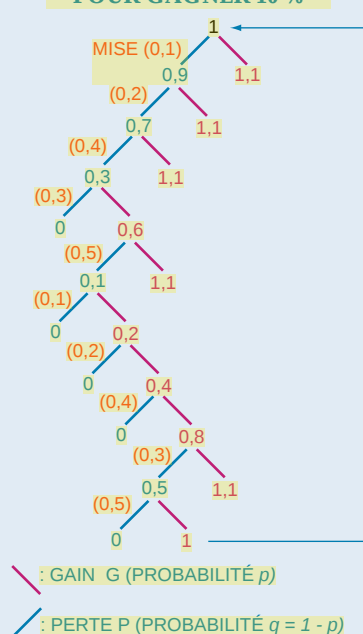
Toutes les méthodes de jeu, comme nous l'avions constaté par expérimentation, ne sont pas équivalentes. Mon ami avait raison sur un point : pour atteindre un but donné, il y a des stratégies meilleures que d'autres (ce qui ne veut pas dire qu'on peut gagner contre le casino).

Le théorème du Jeu hardi nous conduit à de meilleures stratégies que celles envisagées jusqu'à présent pour décupler, ou augmenter de 10 pour cent, notre capital. Si votre objectif est de décupler votre pécule (passer de A à $10A$), vous devez miser A la première fois (c'est le plus que vous pouvez faire) ; si vous avez gagné, misez $2A$, puis, si vous avez gagné, misez $4A$; puis finalement misez $3A$ (car cela vous suffit pour atteindre $10A$). Si vous perdez au dernier coup, vous vous trouvez avec $7A$, il vous manque $4A$, vous misez donc $4A$. Etc.

Cette stratégie ressemble à la martingale géométrique dans le cas où l'on prend K égal à A , mais elle ne lui est pas complètement équivalente, car lorsque vous venez de perdre, plutôt que de repartir de K (martingale géométrique), ici vous jouez ce qui est nécessaire pour atteindre l'objectif en un coup, si c'est possible.

Dans le cas de l'objectif du doublement du capital de 10 francs à 20 francs, la stratégie des mises constantes avec K égal à 10 francs et la martingale géométrique avec K égal à 10 francs sont identiques à

4. STRATÉGIE OPTIMALE POUR GAGNER 10 %



En suivant les divers chemins de gain, on voit que la probabilité de passer d'une somme à 1,1 fois cette somme est : probabilité de G (p) + probabilité de P puis G (qp) + probabilité de P puis P puis G (q^2p) + probabilité de P puis P puis P puis G (q^3p) + probabilité de P puis P puis P puis P puis G (q^4p) + probabilité de P puis P puis P puis P puis P puis G (q^5p) puis boucler en revenant à 1, après simplification.

$$r = (p + qp + q^2p + q^3p + q^4p + q^5p) / (1 - q^5p)$$

Avec la stratégie du Jeu hardi à la roulette française ($p = 36/73$), si vous êtes prêt à risquer 1 000 F pour en gagner 100, vous réussirez dans 90,426 pour cent des cas.