

ses chances avec des valeurs de K croissantes. Pour p égal à $18/38$, par exemple, selon que vous partez de K égal à 1 franc, K égal à 5 francs, ou K égal à 10 francs, votre probabilité de réussite passe de 3,56 pour cent à 3,72 pour cent, puis à 4,79 pour cent.

Lorsque p est inférieur à $1/2$, des stratégies de jeu essayées pour l'instant, c'est la stratégie de d'Alembert avec K égal à 10 qui est la meilleure.

Peut-on améliorer la probabilité de décupler, doubler ou augmenter de 10 pour cent votre fortune initiale ?

LA MARTINGALE GÉOMÉTRIQUE

La martingale géométrique est la plus populaire de toutes, tant son principe est simple et, à première vue, infaillible. C'est *La martingale*. On commence par miser K francs ; si on perd, on double la mise, et on la double ainsi jusqu'à ce que l'on gagne. Lorsque cela arrive, on a perdu $K + 2K + 4K + \dots + 2^{n-1}K$ et on a gagné $2^n K$, donc on a gagné K francs. On recommence alors tout, avec une mise de K francs.

Exemple : vous misez 1 franc, vous perdez ; vous misez alors 2 francs, vous perdez ; vous misez alors 4 francs, vous gagnez. Au total, vous avez gagné 4 francs et perdu 3 francs, ce qui donne un bilan positif de 1 franc.

Si l'on pouvait ainsi toujours doubler, on gagnerait K francs à chaque série et, petit à petit, on accumulerait tout l'argent que l'on veut. Cherchez l'erreur.

Elle est double. D'abord, quand on n'a plus rien, on ne peut plus miser ; or il arrive qu'il y ait de longues séquences de tirages identiques (le record dans une salle de casino est une série de 42 fois le rouge). Ensuite, les mises autorisées sont limitées (à 1 000 fois la mise la plus faible pour une table donnée dans les casinos français) et donc, même si vous êtes très riche, vous ne pourrez pas appliquer la martingale géométrique plus de 10 étapes.

Rendons-la praticable en précisant nos choix en cas de blocage. On double la mise précédente si on a perdu, tant que rien ne s'y oppose, mais si on peut atteindre l'objectif de B francs en misant moins que ce que la règle indique, on le fait, et si on n'a pas assez pour miser conformément à la règle, on met le maximum dont on dispose.

K est la mise initiale. Pour chaque résultat, 50 000 essais ont été faits. Là encore, les résultats sont donnés sur la figure 2. Si p est égal à $1/2$, rien ne permet de dévier de A/B ; on vérifie, à nouveau, que la roulette américaine est bien plus productive que la roulette française (pour la banque, bien sûr!).

On découvre que la stratégie géométrique est meilleure que les deux autres méthodes de jeu envisagées auparavant, et qu'elle est meilleure pour K égal à 10 francs que pour K égal à 5 francs ou K égal à 1 franc.

Il semble que non seulement l'argent va aux riches, mais aussi qu'il va (ou reste, mieux!) à ceux qui misent plus gros! Les stratégies les plus violentes sont les meilleures. Plus grosse est la valeur de K , mieux c'est, et plus violente est la stratégie, mieux c'est (la géométrique est plus violente que la d'Alembert, elle-même plus violente que les mises constantes). Cette règle est-elle générale? Si oui, comment la formuler précisément?

Le fait que, pour p supérieur à $1/2$, nous trouvons que la martingale de d'Alembert avec K égal à 1 est très légèrement meilleure pour doubler son capital que la géométrique avec K égal à 1 (seule exception numérique à la supériorité générale de la géométrique) ne contredit pas notre remarque générale, car, dans la d'Alembert avec K égal à 1, la baisse des mises se fait plus lentement que dans la géométrique (aussi avec K égal à 1) et conduit donc, en moyenne, à un comportement plus violent. La violence du comportement semble en toute généralité le bon comportement à ce jeu.

LE THÉORÈME DU JEU HARDI

Ce résultat général que tout le monde devrait connaître sera dénommé le théorème du Jeu hardi ou loi de Dubins et Savage (ils furent les premiers à l'établir, en 1956). Le précepte est moral, il faut passer le moins de temps possible devant le tapis vert.

Théorème du Jeu hardi. La meilleure façon de jouer dans un jeu à deux options de probabilités p et $1 - p$ avec p inférieur à $1/2$, pour passer de A à B , consiste à miser toujours ce qui permet d'approcher le plus le but visé.

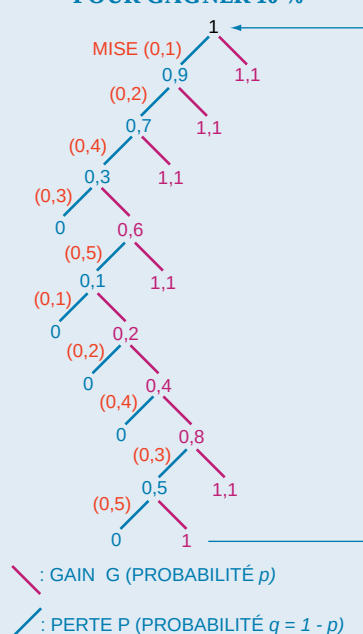
Toutes les méthodes de jeu, comme nous l'avions constaté par expérimentation, ne sont pas équivalentes. Mon ami avait raison sur un point : pour atteindre un but donné, il y a des stratégies meilleures que d'autres (ce qui ne veut pas dire qu'on peut gagner contre le casino).

Le théorème du Jeu hardi nous conduit à de meilleures stratégies que celles envisagées jusqu'à présent pour décupler, ou augmenter de 10 pour cent, notre capital. Si votre objectif est de décupler votre pécule (passer de A à $10A$), vous devez miser A la première fois (c'est le plus que vous pouvez faire) ; si vous avez gagné, misez $2A$, puis, si vous avez gagné, misez $4A$; puis finalement misez $3A$ (car cela vous suffit pour atteindre $10A$). Si vous perdez au dernier coup, vous vous trouvez avec $7A$, il vous manque $4A$, vous misez donc $4A$. Etc.

Cette stratégie ressemble à la martingale géométrique dans le cas où l'on prend K égal à A , mais elle ne lui est pas complètement équivalente, car lorsque vous venez de perdre, plutôt que de repartir de K (martingale géométrique), ici vous jouez ce qui est nécessaire pour atteindre l'objectif en un coup, si c'est possible.

Dans le cas de l'objectif du doublement du capital de 10 francs à 20 francs, la stratégie des mises constantes avec K égal à 10 francs et la martingale géométrique avec K égal à 10 francs sont identiques à

4. STRATÉGIE OPTIMALE POUR GAGNER 10 %



En suivant les divers chemins de gain, on voit que la probabilité de passer d'une somme à $1,1$ fois cette somme est : probabilité de G (p) + probabilité de P puis G (qp) + probabilité de P puis P puis G (q^2p) + probabilité de P puis P puis P puis G (q^3p) + probabilité de P puis P puis P puis G (q^4p) + probabilité de P puis P puis P puis P puis G (q^5p) puis boucler en revenant à 1, après simplification.

$$r = (p + qp + q^2p + q^3p + q^4p + q^5p) / (1 - q^5p)$$

Avec la stratégie du Jeu hardi à la roulette française ($p = 36/73$), si vous êtes prêt à risquer 1 000 F pour en gagner 100, vous réussirez dans 90,426 pour cent des cas.

la stratégie du Jeu hardi, qui se réduit alors à miser une fois 10 francs (la probabilité d'aboutir est évidemment p). Les résultats expérimentaux obtenus en faisant 200 000 essais pour chaque cas (l'expérimentation étant plus rapide, on a augmenté le nombre d'essais pour avoir une meilleure précision) sont indiqués dans le tableau de l'encadré 2.

Notons que, si vous êtes prêt à risquer 10 francs pour gagner 1 franc (ou 10 000 francs pour gagner 1 000 francs), en appliquant la règle de jeu donnée par le schéma, vous réussirez en France avec une probabilité 0,9042656... (voir l'encadré 4), ce qui est assez raisonnable. Ne nous réjouissons pas trop : si vous appliquez cette méthode de jeu tous les soirs régulièrement, les soirs où vous gagnez (plus de 90 pour cent des cas) ne compensent pas, à long terme, ceux où vous perdez, car quand vous perdez, vous perdez dix fois plus que quand vous ne gagnez.

INEXISTENCE DE MARTINGALE

Le résultat de Dubins et Savage est décevant, car il indique que vous devez jouer le plus vite possible. Si ce qui vous amuse est le jeu, la conclusion obtenue est la pire de toutes celles qu'on pouvait découvrir. Cela est en fait lié à la loi de la perte constante : *Quand on joue à un jeu avec une probabilité p inférieure à $1/2$ de gagner (pour le joueur), alors, quelle que soit la stratégie utilisée, on perd «en moyenne» proportionnellement à ce qu'on mise.*

Tout cela est tristement simple : les pertes moyennes ne dépendent que des sommes posées sur la table et sont déterminées par le coefficient p du jeu. La façon de jouer est sans importance, martingale géométrique ou Jeu hardi ou stratégie optimale, tout est équivalent.

Une conséquence de la loi de la perte constante est aussi qu'aucune martingale ne retourne jamais les probabilités de gains en votre faveur. Autrement dit, il n'existe pas de martingale. En particulier : (i) aucun avantage ne peut être obtenu en ne jouant que sur certains tirages ; (ii) aucun avantage ne peut être obtenu par celui qui décide de la fin de la partie (le droit de faire charlemagne ne sert à rien) ; (iii) même si l'on veut diminuer son espérance par franc misé, on ne le peut pas. Finalement, plus vous jouez, plus vous perdez, inéluctablement. Pour perdre le moins, vous devez jouer le moins possible. Pour ne pas perdre du tout, vous ne devez pas jouer du tout.

Il est difficile de se persuader complètement que prendre en compte le passé est inutile, et que ce n'est pas parce que le rouge est sorti 10 fois de suite que le noir a plus de chances au coup suivant. Cependant il faut s'y résoudre : les jeux de

casino sont idiots, et ce sont bien des entreprises commerciales dont la rentabilité est assurée sur le long terme par des lois mathématiques démontrées et testables.

Au total, mon ami qui prétendait pouvoir gagner à la roulette a tort : plus on joue plus on perd, rien n'y fait. Dans son raisonnement de départ, il y avait une erreur : si l'on vous donne un total de sommes à miser, il n'existe ni de bonnes façons de le jouer, ni de mauvaises. Ramené au total de l'argent que vous posez sur la table, vous ne pouvez ni bien jouer, ni mal jouer.

Toutefois, comme Paul Deheuvels le fait remarquer, les règles du jeu de la roulette autorisent d'autres mises que les mises simples, par exemple les numéros pleins, qui conduisent à gagner un multiple de sa mise ou à la perdre (avec une probabilité de gain plus faible qui maintient une espérance de gain positive pour le casino). Il n'est pas impossible qu'en utilisant pleinement les mises autorisées d'autres méthodes permettent par exemple d'améliorer un peu le 0,90426... trouvé pour passer de 10 à 11 à la roulette française.

Hélas, il n'y a pas grand-chose à grignoter, car pour passer de 10 à 11, à un jeu défavorable, le produit de la probabilité de réussite r par votre gain souhaité (1 franc) sera toujours inférieur à votre probabilité de perdre vos 10 francs, multipliée par cette perte. Donc : $1r < (1 - r)10$, qui implique que $r < 10/11 = 0,90909...$ (ce 10/11 que l'on obtient en faisant n'importe quoi lorsque p est égal à $1/2$ est une barrière inaccessible lorsque p est inférieur à $1/2$).

GAGNER AUTREMENT?

Nous avons jusqu'ici supposé que le jeu était équitable, dans le sens que la roulette était bien équilibrée : chaque numéro a une chance sur 37 de sortir (une sur 38 à la roulette américaine). Il se peut que cela ne soit pas le cas parce que la roulette est truquée ou usée (la durée de vie d'une roulette utilisée tous les soirs est d'environ dix ans).

Vient alors l'idée de miser sur ce qui tombe le plus souvent, de façon à profiter de l'inégalité des chances entre numéros. L'idée générale d'exploiter l'imperfection des roulettes n'est pas absurde et elle fut effectivement utilisée par William Jaggars à la fin du XIX^e siècle. Il gagna ainsi 1 500 000 francs à Monte-Carlo, à la suite d'une analyse fine des fréquences de sortie des numéros. Depuis, les casinos ont compris que leur intérêt est que les roulettes soient bien équilibrées et ils y veillent soigneusement : l'intérêt d'un casino à la roulette est qu'il n'y ait aucun biais !

Plus récemment, en 1978 et 1979, Norman Packard et Doyné Farmer, par une technique de mesure de la vitesse de la boule et du cylindre portant les numéros réussirent à prévoir la zone où devait arriver la bille avec une précision suffisante pour renverser l'avantage du casino en leur faveur. Cela leur permit de gagner plusieurs milliers de dollars. Les mesures et les calculs étaient faits à l'aide d'appareillages qu'ils portaient sur eux, cachés dans leurs vêtements. Ayant observé une roulette attentivement, je dois avouer que je doute de la véracité de cette histoire.

Un autre jeu de casino doit être mentionné, le black jack. Contrairement à la roulette, il n'est pas toujours défavorable aux joueurs. À la suite d'études menées à l'aide d'ordinateurs depuis 1956 plusieurs mathématiciens ont mis au point des techniques de jeu (nécessitant le plus souvent de mémoriser les cartes qui passent) qui, quand elles sont appliquées rigoureusement (ce qui demande de longues semaines d'entraînement), renversent les chances en faveur du joueur. Certains joueurs tentèrent de s'aider d'ordinateurs cachés sur eux pour appliquer ces méthodes plus facilement. Les casinos ont appris à repérer et à dissuader les joueurs trop concentrés (parce qu'ils mémorisent les cartes jouées) qui tentent d'appliquer ces méthodes et qu'on appelle des «compteurs de cartes». Les joueurs se font aussi repérer par les variations brusques des mises qu'ils font et qui sont caractéristiques (il paraît qu'en France les casinos n'empêchent pas les «compteurs de cartes» de jouer ; je n'ai pas vérifié !). De plus, les casinos se sont mis à utiliser des quadruples jeux de cartes pour rendre ces méthodes inopérantes. Pour faire fortune, il n'y a décidément rien à attendre des jeux de casino.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

T. BASS, *The Newtonian Casino*, Éditions Longman, 1990.

Y. COURCHESNE, *Les secrets du black jack*, Les Éditions de l'Homme, Montréal, 1993.

P. DEHEUVELS, *La probabilité, le hasard et la certitude*, PUF, 1990.

R. EPSTEIN, *The Theory of Gambling and Statistical Logic*, Academic Press, San Diego, 1970, 1995.

A. NEURISSE, *Les jeux d'argent et de hasard*, Éditions Hermé, 1991.

M. ORKIN, *Can you win?* W. H. Freeman and Company, New York, 1991.

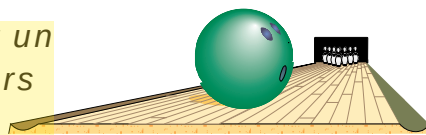
P. TOUGNE, *La mathématique des jeux, chapitre 18 : «Roulette, loto et probabilités»*, Éditions Pour la Science / Belin, pp. 147-146, 1990.



Le strike facile au bowling ?

PATRICK DAVID

Le huilage de la piste est un paramètre dont les joueurs tiennent compte.



Dans l'univers-loisir qui transite par les centres de bowling, nombre de débutants ont trouvé cette activité amusante, voire prenante. Toutefois, chacun s'accorde à estimer que ce sport est difficile, surtout quand il compare sa réussite à celle du «spécialiste» évoluant sur une piste voisine...

Le rêve du joueur est le strike, lorsque la boule fait tomber les dix quilles. Cette réussite dépend de la façon dont la boule arrive dans les quilles.

Il y a une infinité de possibilités pour réaliser un strike. Certaines sont extrêmement bizarres et chanceuses. Cependant, pour obtenir un résultat marquant et une régularité – synonyme d'efficacité et de bon score –, il est nécessaire de comprendre comment se déroule un strike et quels sont les moyens pour prétendre le réussir régulièrement. En fait, le joueur de compétition cherche à assurer un spare, c'est-à-dire la chute des dix quilles en deux boules ; le strike est une heureuse surprise, fréquente chez les professionnels, un don du ciel pour les amateurs.

Un strike est un compromis ! Les dix quilles ont 12,1 centimètres de diamètre au maximum. Neuf sont disposées selon un triangle équilatéral, une dernière étant posée pile en son centre, toutes distantes de 30,48 centimètres les unes des autres. Si le joueur lance la boule, qui fait 21,6 centimètres de diamètre, en plein milieu (donc

alignée sur la quille de tête et la quille 5), il est clair que les quilles 4, 7, 6, 10 ne tomberont pas.

Faut-il alors que la boule arrive avec un angle de 30 degrés sur la première quille afin qu'elle soit parfaitement alignée avec un côté du triangle ? Pas plus ! Cette configuration serait idéale s'il n'y avait pas les autres quilles ! Avec un tel angle d'arrivée, la boule ne sera pas repoussée par le choc sur la quille de tête. Elle ne touchera que les quatre quilles de son alignement, 1, 3, 6, 10.

Un compromis entre différents facteurs est nécessaire : l'alignement de la boule et des quilles, les dérives dues aux chocs entre la boule et les quilles 1, 3, 5, la vitesse de la boule qui influe sur son énergie cinétique, donc sur les dérives.

LA GÉOMÉTRIE DU BALAYAGE

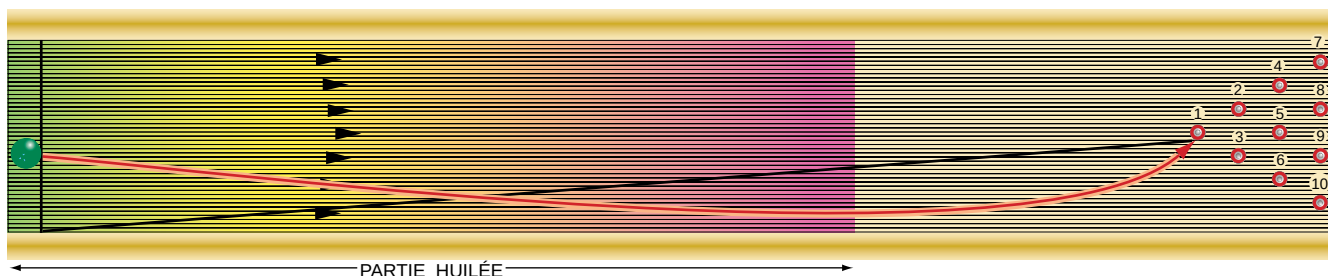
Pour déterminer le bon compromis entre le point et l'angle d'arrivée de la boule, nous étudierons les limites déterminées par le balayage des alignements. Tout d'abord, nous savons que lorsqu'un objet sphérique en mouvement heurte un autre objet sphérique immobile, ce dernier part en direction de l'axe donné par l'alignement des deux centres au moment de l'impact et ce, quelle que soit la direction du premier objet. Examinons l'alignement

constitué par les quilles 1-2-4-7. Les considérations géométriques indiquent que, pour réaliser cet alignement, nous avons une marge de seulement 17 degrés, soit 1,7 centimètre, pour que la boule touche la quille avec une assurance de réussir les quatre quilles directement par balayages successifs. Pour la ligne des quilles 3-6-10, nous voyons que cette zone d'impact entre la boule et la quille passe à 25 degrés, soit 2,5 centimètres environ (voir la figure 3). Pour finir, l'impact de la boule sur la quille 5 devra être précise à 44 degrés, ou 4,4 centimètres, pour que la quille 8 soit abattue.

Ainsi un strike est réalisé par un lancer qui amène la boule à toucher la quille 1 dans la zone des 17 degrés déterminée, puis la quille 3 dans la zone des 25 degrés, ensuite la quille 5 dans les 44 degrés, enfin, la boule enlève la quille restante, la numéro 9. Sur un strike, donc, la boule ne touche que quatre quilles, les 1-3-5-9 (voir la figure 3 c).

Dans ce qui suit, nous nous fondons sur les données suivantes : un bowling dont la piste est constituée de 39 lattes, la latte numéro 1 à droite et la latte numéro 39 à gauche (le milieu correspond à la latte 20), une boule qui pèse 7,5 kilogrammes, et un joueur droitier.

Des études théoriques poussées, confirmées par la mise en pratique, ont permis de déterminer des conditions «idéales» pour réaliser un strike.



1. Pour frapper la quille 1 avec le bon angle par rapport à l'axe de la piste, il n'est pas possible d'utiliser une trajectoire rectiligne (droite noire). Aussi donne-t-on à la boule une rotation qui incurve la trajectoire dès que la boule quitte la partie huilée.