

sieur Gardner, lorsque vous êtes dans ma classe, je veux que vous fassiez des mathématiques, et rien d'autre!» Pourtant ce problème aurait intéressé toute la classe, et il aurait fait une superbe introduction à la combinatoire, à la théorie des jeux, à la symétrie ou aux probabilités. En effet, tous les élèves jouent au morpion, et tous ont envie de gagner : si des mathématiques simples leur donnent une stratégie, ils sont preneurs. Plus généralement, les mathématiques récréatives sont un merveilleux tremplin pour la présentation des mathématiques.

Dans l'enseignement, la mode est aujourd'hui aux «mathématiques modernes modernes», que je nomme ainsi pour les distinguer des mathé-

matiques modernes qui s'imposèrent il y a 10 à 20 ans. Les didacticiens des mathématiques recommandent de diviser les classes en petits groupes qui doivent résoudre des problèmes par des raisonnements élaborés en commun. L'«enseignement interactif» se substitue au cours. Ces nouvelles méthodes ont des avantages, mais pourquoi néglige-t-on encore tant les mathématiques récréatives, qui imposent tout naturellement un raisonnement interactif? Imaginez que vous soyez professeur : vous demandez à chaque groupe d'élèves de penser à un nombre quelconque de trois chiffres ABC . Puis vous demandez ensuite de taper le nombre deux fois de suite dans une calculatrice. Si les élèves choisissent

le nombre 237, par exemple, ils tapent 237237. Dites-leur alors que vous avez le pouvoir psychique de prédire que, s'ils divisent le nombre tapé par 13, le reste sera nul. Ils le vérifieront facilement. Puis demandez-leur de diviser le quotient trouvé par 11 : le reste sera encore nul. Enfin demandez-leur de diviser le nouveau quotient par 7 : cette fois, le reste est encore nul, et le quotient déterminé est le nombre initial!

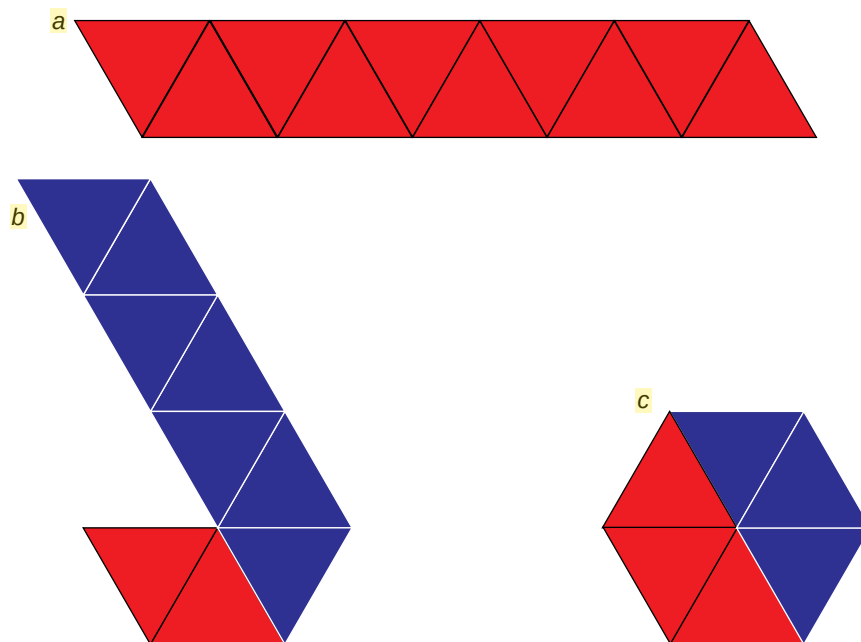
Le tour s'explique simplement quand on observe que $ABCABC$ est égal au produit de ABC par 1001; or 1001 est égal à $13 \times 11 \times 7$. Existe-t-il une meilleure introduction à la théorie des nombres et aux propriétés des nombres premiers?

Polyominos et Jeu de la vie

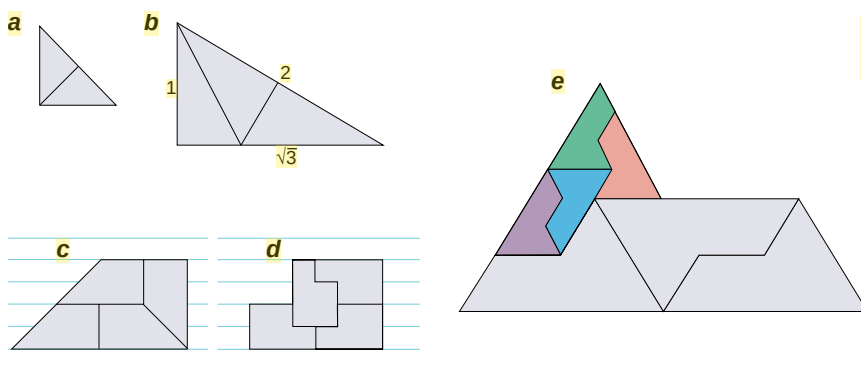
J'ai eu plusieurs fois l'occasion de faire connaître des mathématiciens originaux. Alors que je n'étais qu'amateur de mathématiques, ma rubrique m'a valu un abondant courrier de lecteurs du monde entier, de sorte que la matière des articles fut variée et passionnante. Solomon Golomb, de l'Université de Californie du Sud, est un des premiers mathématiciens qui m'aidèrent ainsi. En mai 1957, j'exposai ses travaux sur les polyominos, des formes que l'on obtient en accolant des carrés identiques par leurs arêtes. Le domino, avec deux carrés, n'a qu'une seule forme, mais il existe plusieurs triominos, tétraminos, pentominos, etc. : en L, en T, en carrés...

S. Golomb chercha d'abord si un ensemble de polyominos pouvait recouvrir complètement un damier. L'étude des polyominos se développa rapidement, engendrant une branche nouvelle des mathématiques récréatives. Arthur Clarke, le célèbre auteur de science-fiction, est un de ceux qui se passionnèrent pour les polyominos.

S. Golomb me signala également une classe de figures qu'il nommait les rep-tiles : ce sont des polygones qui, convenablement accolés, pavent une réplique agrandie de l'un d'entre eux (en anglais, *tile* signifie «pavage»). Un des rep-tiles est le sphinx, un pentagone irrégulier dont la forme rappelle celle du monument égyptien (voir la figure 3). Quatre sphinx convenablement disposés redonnent un sphinx deux fois plus grand. Les rep-tiles ont la particularité qu'on peut les associer en rep-tiles plus grands, que l'on peut eux-mêmes associer en rep-tiles encore plus grands, et ainsi de suite.

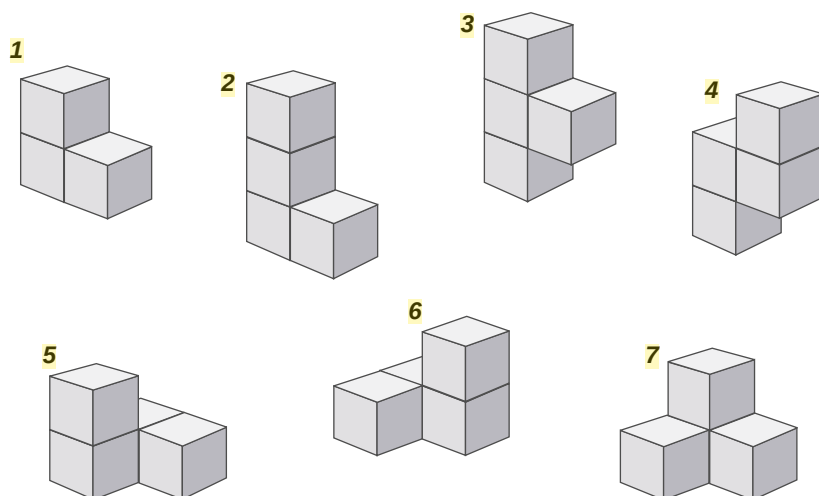


2. LES HEXAGLEXAGONES s'obtiennent à partir d'une bande de papier (a) par le pliage indiqué ici par les couleurs rouge et bleue, qui distinguent les deux faces. Quand on déforme l'hexaglexagone obtenu (c) pour obtenir un nouvel hexaflexagone, des faces qui étaient cachées apparaissent.



3. QUAND DES REP-TILES d'ordre inférieur s'assemblent, ils forment des répliques grossies d'eux-mêmes. Le demi-carré (a) est une rep-2 figure : deux demi-carrés s'assemblent pour former un demi-carré plus grand. Il faut trois rep-3 triangles rectangles (b) pour former un triangle rectangle de surface trois fois supérieure. En (c) et en (d) apparaissent respectivement un rep-4 quadrilatère et un rep-4 hexagone. Le sphinx (e) est le seul rep-4 pentagone connu.

Ian Worple



4. LES SEPT POLYCUBES DE SOMA sont composés de trois ou quatre cubes identiques (*ci-dessus*). Comment les assembler pour former un cube de trois cubes de côté, ou cube de Soma ? Ce problème a 240 solutions différentes. On peut également assembler les polycubes de Soma pour former toutes les constructions de droite... sauf une : laquelle ? La réponse est donnée en page 92.

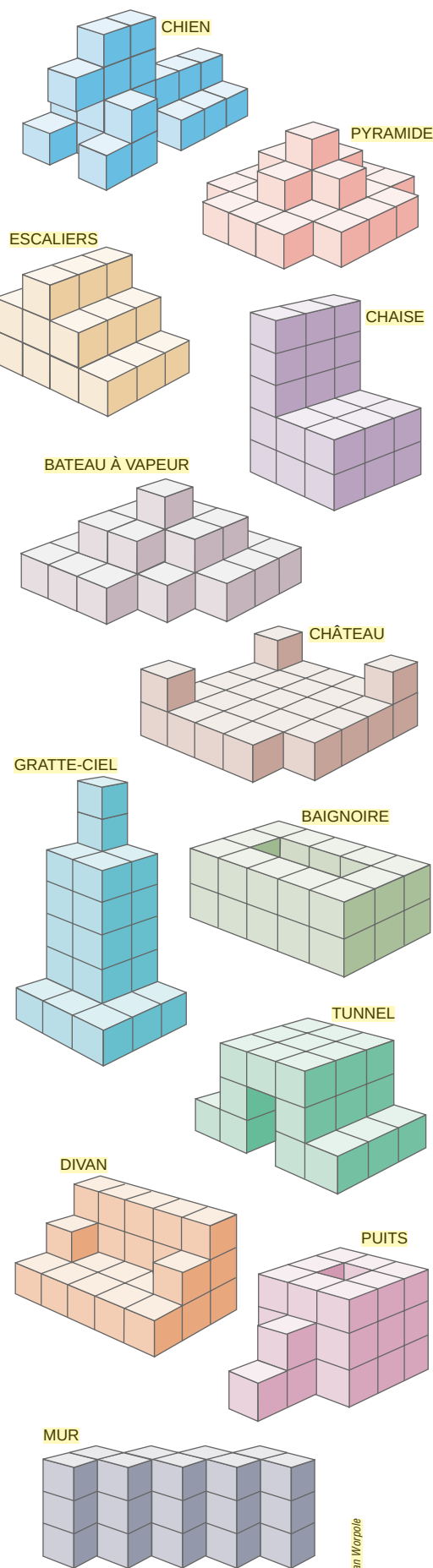
Le poète danois Piet Hein me communiqua également quelques-unes de ses inventions. En 1957, je présentai son jeu d'hex, un jeu topologique qui se joue sur un damier en forme de losange composé d'hexagones. À tour de rôle, les joueurs placent une pièce (noire pour un des joueurs, blanche pour l'autre) sur les hexagones vides et ils essaient de former une chaîne continue qui joigne un côté du damier au côté opposé ; une fois posée, une pièce ne peut être ni déplacée ni prise.

Hein inventa également le cube de Soma, dont j'ai présenté les particularités à trois reprises. Le nom provient probablement du roman d'Aldous Huxley *Le meilleur des mondes*, où une drogue nommée Soma met ses utilisateurs dans un état d'oubli qui est celui que l'on retrouve avec le jeu de Hein. Le jeu utilise sept polycubes différents (les polycubes sont les analogues des polyominos à trois dimensions : on les obtient en assemblant des cubes identiques par leurs faces). Les polycubes de Soma peuvent être assemblés en un cube de Soma de 240 manières. On peut aussi les utiliser pour réaliser des formes variées : pyramide, baignoire, chien, etc.

Un autre mathématicien que j'ai eu le privilège de rencontrer est John Conway, qui, me rendant visite en 1970, me demanda à brûle-pourpoint si j'avais un grand damier. Il me montra alors son jeu de simulation, aujourd'hui célèbre : le Jeu de la vie. Il plaça plusieurs pions sur le damier, puis enleva ou ajouta des pions en se conformant

à trois règles simples : tout pion entouré de 2 ou 3 autres pions reste en place (on considère les pions de toutes les cases adjacentes par un côté ou par un sommet) ; tout pion ayant 0, 1, 4, 5, 6, 7 ou 8 pions voisins est éliminé ; on ajoute un pion dans les cases vides quand elles sont entourées de trois pions exactement. En appliquant ces règles itérativement, les motifs initiaux évoluent, grossissent parfois, meurent aussi dans certains cas. Décrit pour la première fois dans la rubrique d'octobre 1970, ce jeu eut tant de succès parmi les utilisateurs d'ordinateurs que de nombreux laboratoires publics et privés furent paralysés pendant des mois : les informaticiens détournèrent le matériel informatique de ses utilisations normales, afin de tester le Jeu de la vie.

J. Conway collabora ensuite avec Richard Guy et Elwyn Berkelamp, à qui l'on doit l'une des plus belles œuvres de mathématiques récréatives de ce siècle : le livre *Winning Ways* («Stratégies gagnantes»), publié en 1982. Les deux tomes de cet ouvrage contiennent notamment la présentation d'un jeu remarquable nommé Phutball, qui se joue à deux sur un plateau de go avec des pions qui sont tous de la même couleur. La «phutballe» est initialement placée au centre du damier, et les joueurs, qui jouent à tour de rôle, peuvent soit placer un jeton sur une intersection vide, soit déplacer la phutballe en la faisant sauter par-dessus une chaîne continue de jetons alignés dans n'importe quelle direction horizontale, verticale ou diagonale ; les



Ian Worple

jetons par-dessus qui la phutballe a sauté sont alors retirés du damier. Comme aux dames, des sauts peuvent s'enchaîner si la configuration s'y prête. Le but du jeu est de faire franchir à la phutballe la ligne de but adverse.

De nombreux autres mathématiciens m'ont aidé. Frank Harary, de l'Université d'État du Nouveau-Mexique, m'invita à faire connaître son jeu de morpion généralisé : au lieu de chercher des alignements de X ou de O sur un réseau 3×3 , les joueurs doivent réaliser un polyomino spécifié, tel un L ou un carré. De même, Ronald Rivest, de l'Institut de technologie du Massachusetts, m'autorisa à révéler le système de codage à clef publique qu'il inventa avec M. Shamir et L. Adel-

man : ce système, qui révolutionna la cryptologie, est aujourd'hui utilisé dans la majorité des systèmes électroniques.

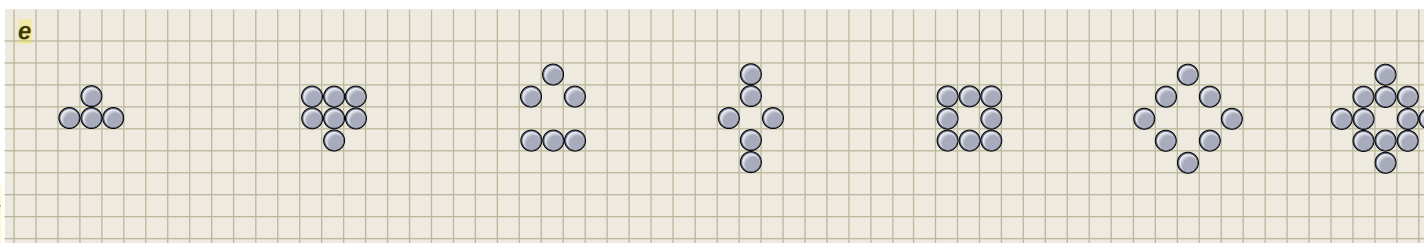
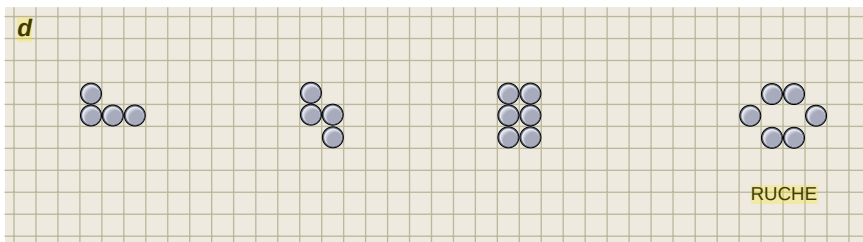
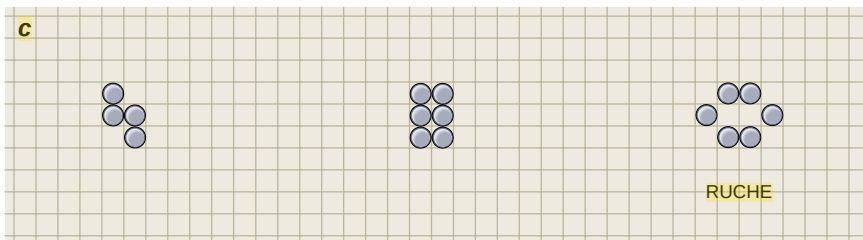
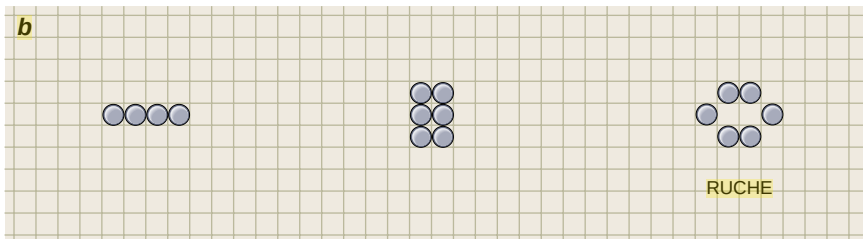
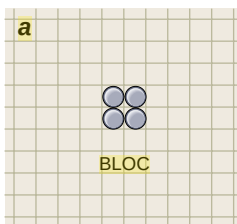
J'ai également fait connaître les œuvres de Maurits Escher en 1961, ainsi que les pavages non périodiques de Roger Penrose, physicien et mathématicien d'Oxford. Penrose découvrit ses pavages en s'amusant, mais ils eurent ensuite une application insoupçonnée. Il conçut initialement deux sortes de formes, les oiseaux et les flèches, avec lesquelles il parvint à couvrir le plan, mais seulement de manière non périodique : aucune partie du dessin ne se répète. Plusieurs années après la découverte de ces pavages, la physique du solide découvrit des structures chimiques nouvelles, dont la description imposa l'usage de pavages tridimensionnels de Penrose. Depuis, les physiciens ont publié des centaines de textes sur ces objets, qui ont des propriétés mécaniques si remarquables qu'on en fait maintenant des poêles anti-attachantes et très résistantes. Une découverte de mathématiques récréa-

tives est ainsi devenue la base d'une partie importante de la physique du solide.

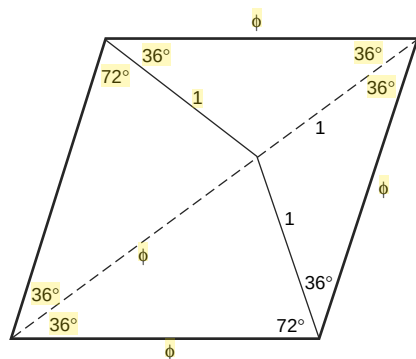
La chasse d'eau de Léonard

Les deux articles qui m'ont valu le plus de courrier sont ceux du 1^{er} avril 1975 et celui où je présentai le paradoxe de Newcomb. Dans ma chronique d'avril, je me plaignais de l'importance que les journaux consacrent aux phénomènes paranormaux et je prétendais présenter de grandes avancées scientifiques qui auraient pâti du désintérêt pour les sciences. Parmi les découvertes les plus remarquables, je mentionnais une réfutation de la théorie de la relativité et la découverte de la chasse d'eau par Léonard de Vinci. J'indiquais aussi une ouverture d'échecs que je prétendais gagnante, et j'écrivais que le nombre e (la base des logarithmes, égal à 2,718...) élevé à la puissance $\pi \times \sqrt{163}$ était un nombre entier (262 537 412 640 768 744).

À ma grande surprise, des milliers de lecteurs prirent cet article au sérieux. Il contenait notamment une carte compliquée, où je signalais que quatre couleurs ne suffisaient pas pour que deux régions adjacentes soient toujours de couleurs différentes. Des centaines de lecteurs m'envoyèrent leurs coloriages de la carte, avec quatre couleurs seulement, mais je n'en fus pas étonné : le

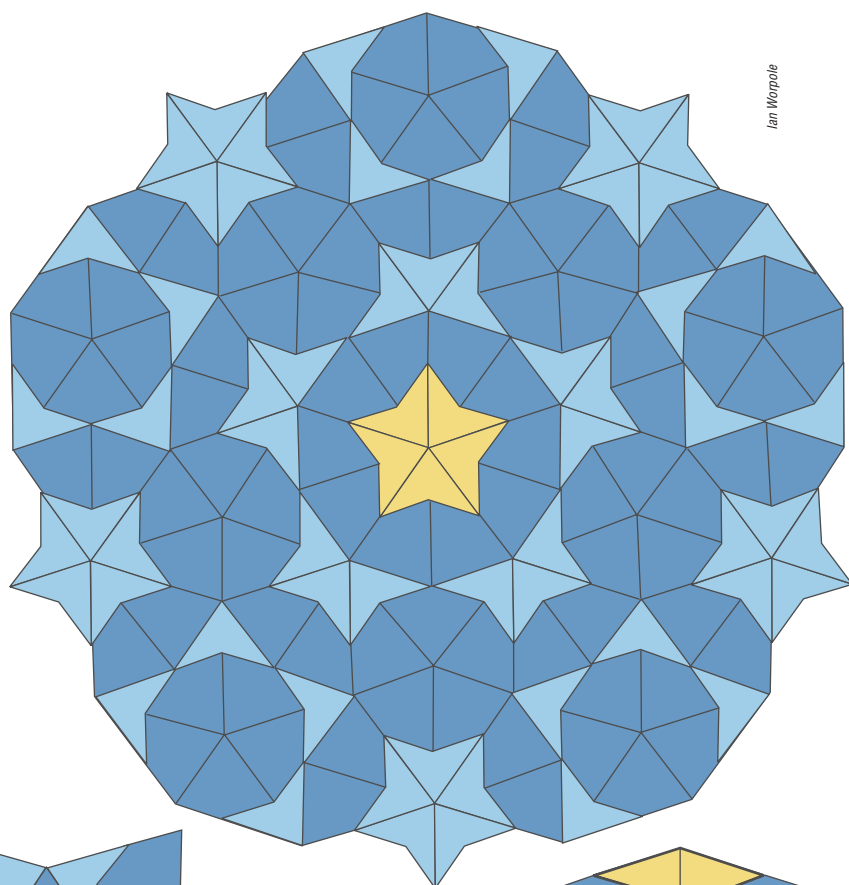


5. DANS LE JEU DE LA VIE, inventé par le mathématicien John Conway, des formes évoluent en raison de l'application répétée de trois règles simples, qui conduisent à l'ajout ou à la suppression d'un pion : tout pion entouré de deux ou trois autres pions reste en place (on considère les pions de toutes les cases adjacentes par un côté ou par un sommet) ; tout pion ayant 0, 1, 4, 5, 6, 7 ou 8 pions voisins est éliminé ; on ajoute un pion dans les cases vides quand elles sont entourées de trois pions exactement. Avec ces règles, on observe qu'un bloc carré (a) reste stable, parce que chacun de ses quatre pions a exactement trois voisins et qu'aucune case vide n'a trois voisins. Les trois formes indiquées en b, c et d évoluent vers la « ruche », qui est stable. Le cinquième arrangement évolue en dix étapes pour former un clignotant.



$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

6. ON RÉALISE UN DES PAVAGES DE PEN-ROSE en divisant un losange en deux pièces, que l'on nomme «oiseau» et «flèche», de sorte que le rapport de leurs diagonales soit égal à ϕ , le nombre d'or, égal à $(1 + \sqrt{5})/2$ (voir le schéma ci-dessus). Quand on juxtapose cinq flèches, on obtient une étoile (en jaune, sur la figure en haut à droite). Si on place alors dix oiseaux autour de l'étoile et si l'on étend le pavage symétriquement, on construit une structure étoilée infinie. On peut aussi paver le plan à l'aide du deux, du valet et de la reine (en bas à droite).

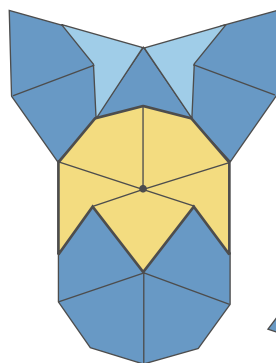


Ian Worpole

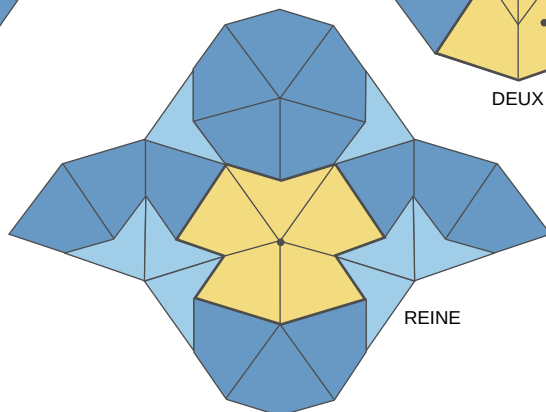
théorème des quatre couleurs avait été démontré l'année précédente.

Le physicien William Newcomb, d'autre part, inventa le paradoxe qui porte aujourd'hui son nom et qui fut publié pour la première fois par le philosophe Robert Nozick, de l'Université Harvard. Imaginons deux boîtes fermées, A et B, qui contiennent respectivement 1 000 francs et soit 0, soit un million de francs. Vous avez deux possibilités : prendre seulement la boîte B ou prendre les deux boîtes. Avec des boîtes normales, le choix est vite fait : si vous prenez les deux boîtes, vous récupérez à la fois le contenu de la boîte A et celui de la boîte B. Imaginons toutefois qu'un être supérieur puisse prévoir votre choix et modifier le contenu de la boîte B : s'il prévoit que vous choisirez les deux boîtes, il vide la boîte B, de sorte que vous n'avez finalement que les 1 000 francs de la boîte A ; s'il prévoit que vous choisirez seulement la boîte B, il y met un million de francs.

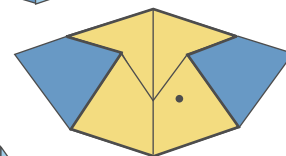
Si vous admettez que l'être supérieur ne se trompe pas, vous devez choisir



VALET



REINE



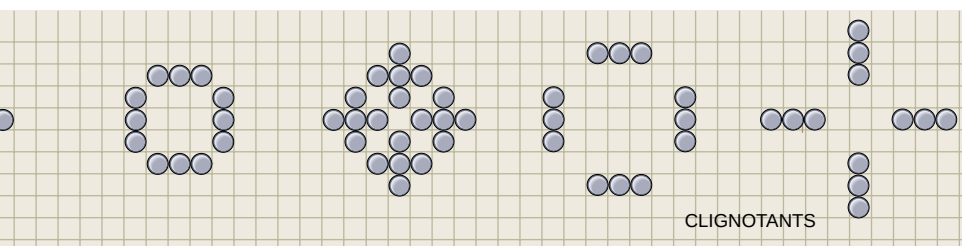
DEUX

seulement la boîte B, afin de gagner un million de francs. Toutefois ce raisonnement simple est fautif : l'être supérieur fait sa prévision avant que vous ayez choisi, et il n'a pas le pouvoir de changer ensuite le contenu des boîtes. Au moment où vous choisissez, la boîte B est soit vide, soit pleine d'un million de francs. Si elle est vide, votre gain

est nul si vous choisissez seulement B, tandis que si vous prenez les deux boîtes, vous gagnez 1 000 100 francs si la boîte B contient un million de francs. Selon ce nouveau raisonnement, vous devez choisir les deux boîtes.

Les deux raisonnements semblent inattaquables, mais ils ne peuvent être tous les deux justes. C'est là le paradoxe de Newcomb, qui me valut tant de lettres de lecteurs que je ne pus y répondre : je dus les transmettre à R. Nozick, qui me donna la teneur d'une réponse collective. À ce jour, le paradoxe reste irrésolu. J'y vois personnellement l'impossibilité d'un être supérieur qui prévoirait nos décisions.

Si la logique est une branche importante des mathématiques récréatives,



CLIGNOTANTS