

Les mathématiques de l'amortissement

ALAIN OUSTALOUP

On perfectionne les systèmes d'amortissement en utilisant les notions mathématiques de fractales, de récursivité et de dérivées non entières. Une suspension automobile a été construite sur ces principes.

De nombreux systèmes de transport ont un degré de stabilité qui diminue lorsque la masse transportée augmente. La 2CV Citroën, par exemple, se balançait inlassablement en sortie de virage quand elle était surchargée. Ce type de comportement est bien connu des ingénieurs ferroviaires, aéronautiques ou maritimes, qui ont longtemps cru que cette interdépendance de l'amortissement et de la masse était inévitable. Nous verrons qu'il n'en est rien.

L'amortissement des systèmes mécaniques est un sujet d'ingénierie classique. Les ingénieurs qui se préoccupent du degré de stabilité des systèmes mesurent celui-ci par le paramètre d'amortissement : ce paramètre caractérise la décroissance des oscillations, après une sollicitation qui a mis le système hors d'équilibre. Le retour à l'équilibre est nommé relaxation ou régime libre. C'est le mouvement que l'on observe quand on comprime les ressorts de suspension d'une voiture, puis que l'on supprime l'effort ; la relaxation de la caisse est sa remontée (régime transitoire) vers son état d'équilibre final. Une relaxation pendant laquelle les oscillations sont excessivement amples et nombreuses révèle un état déficient des amortisseurs.

Les mécaniciens visent généralement un bon amortissement, c'est-à-dire une décroissance rapide des oscillations, afin de limiter leur nombre et d'assurer un bon comportement dynamique.

Le calcul de l'amortissement en fonction de la masse est simple dans

le cas des suspensions classiques composées d'un ressort en parallèle avec un amortisseur (voir la figure 2) : le comportement dynamique de la suspension présente des oscillations transitoires dont la fréquence et l'amortissement décroissent quand la masse croît ; l'amortissement varie alors comme l'inverse de la racine carrée de la masse.

Dans l'automobile, ce cas se présente pour les véhicules qui, à vide, sont légers et peu amortis, telles les 2CV précédemment évoquées. Dans le secteur aéronautique, les pilotes connaissent également bien la différence de comportement dynamique des avions entre la phase de décollage, où l'appareil est à pleine charge, et la phase d'atterrissage, où la charge est réduite, parce que le carburant a été consommé : situé en grande partie dans les ailes, le carburant est responsable de variations importantes de l'inertie de l'appareil. Par exemple, un Boeing 747, dont le poids total au décollage est de 318 tonnes, emporte jusqu'à 152 tonnes de carburant ; le Concorde, de poids total égal à 185 tonnes, emporte jusqu'à 95 tonnes de carburant.

La pleine charge, qui conduit à un médiocre amortissement, n'est pas gênante au décollage. À l'atterrissage, l'avion, qui a généralement consommé son carburant, est moins chargé, de sorte que l'amortissement est meilleur, et le degré de stabilité supérieur. En revanche, le pilote est gêné quand des circonstances imprévisibles le contraignent à entamer des manœuvres d'atterrissage peu après le décollage ; si

les conditions météorologiques sont trop défavorables, le pilote doit alors larguer une partie du carburant afin de conférer à l'appareil un amortissement conforme aux exigences de la situation.

Afin d'obtenir des descriptions théoriques de l'amortissement qui soient à la fois exploitables mathématiquement et réalisables en pratique, les ingénieurs ont d'abord cherché des systèmes (notamment mécaniques) où le désordre n'intervient pas. Autrement dit, ils ont simplifié les systèmes mécaniques qu'ils réalisaient, afin d'éviter les phénomènes incertains ou aléatoires qui risquaient de rendre imprévisibles les comportements de ces systèmes. De ce fait, le désordre (ou, plus précisément, ses manifestations) fut d'emblée exclu des méthodes générales de conception.

Toutefois, depuis quelques décennies, chimistes et physiciens observent que le désordre est parfois stabilisant. En hydrodynamique, il amortit les turbulences et conduit à des écoulements globalement stables et réguliers. En astronomie, il régularise les trajectoires des astres. N'est-ce alors pas une erreur d'exclure *a priori* le désordre naturel des méthodes générales de conception des systèmes dynamiques ?

Nous avons examiné cette question après avoir analysé les propriétés d'amortissement des milieux très perturbés, observées au XVII^e siècle par les constructeurs de digues. Puis, en 1980, nous avons démontré que l'amortissement de l'eau sur une



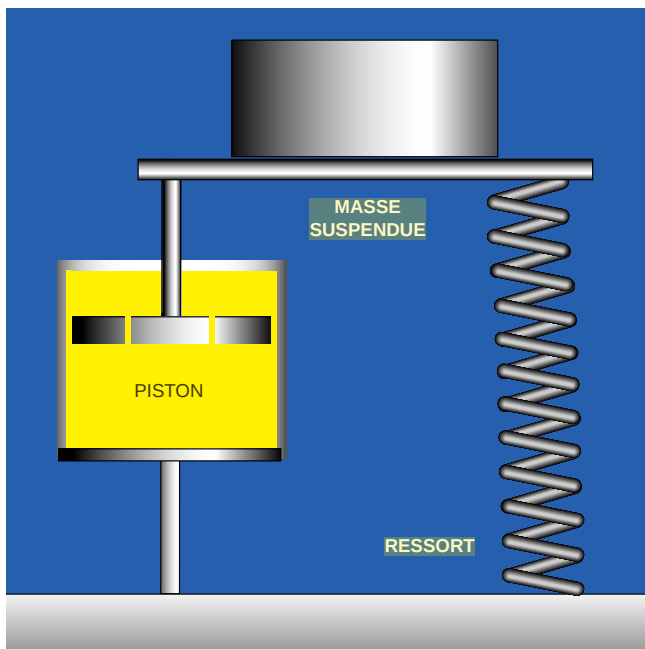
Y. Zedda, Sea and Sky



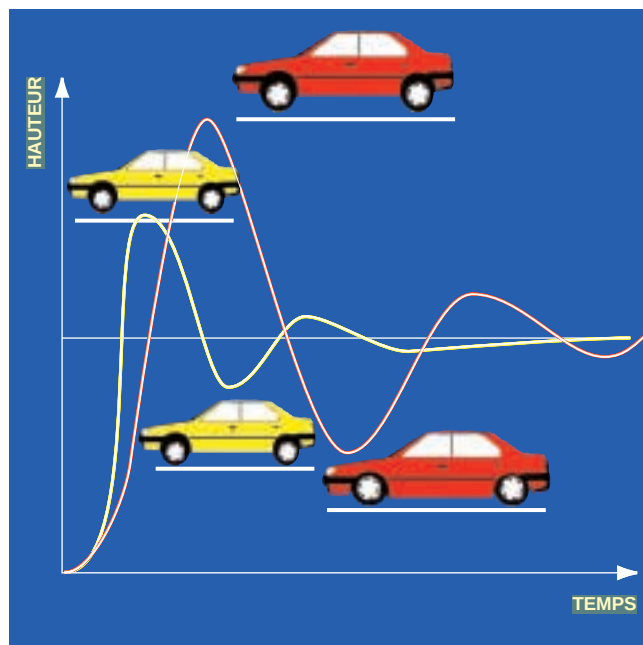
A. Oustaloup

1. LES VAGUES jaillissent quand elles arrivent contre une digue pleine, alors qu'elles sont amorties par une digue désordonnée (en bas, la jetée de Socoa, à Saint-Jean-de-Luz). L'utilisation du

désordre dans la conception des systèmes mécaniques conduit à un perfectionnement des systèmes d'amortissement automobiles (voir la figure 7).



2. L'AMORTISSEMENT est le paramètre qui mesure le nombre d'oscillations d'un système mécanique, après qu'il a été placé dans un état hors d'équilibre et relâché. Le dispositif d'amortissement le plus simple est représenté à gauche : il est composé d'un



ressort et d'un système à frottement visqueux. Les oscillations d'un tel système dépendent de la masse suspendue (à droite, on a représenté les oscillations de deux véhicules identiques : le rouge est plus chargé que le jaune).

digue poreuse est indépendant de la masse d'eau en mouvement : nous avons mathématiquement confirmé que les digues très accidentées amortissent mieux les mouvements de l'eau, surtout quand des poches d'air pouvaient être comprimées par l'avancée des eaux.

Depuis des siècles, les ingénieurs analysent le comportement des digues en enregistrant l'évolution du niveau

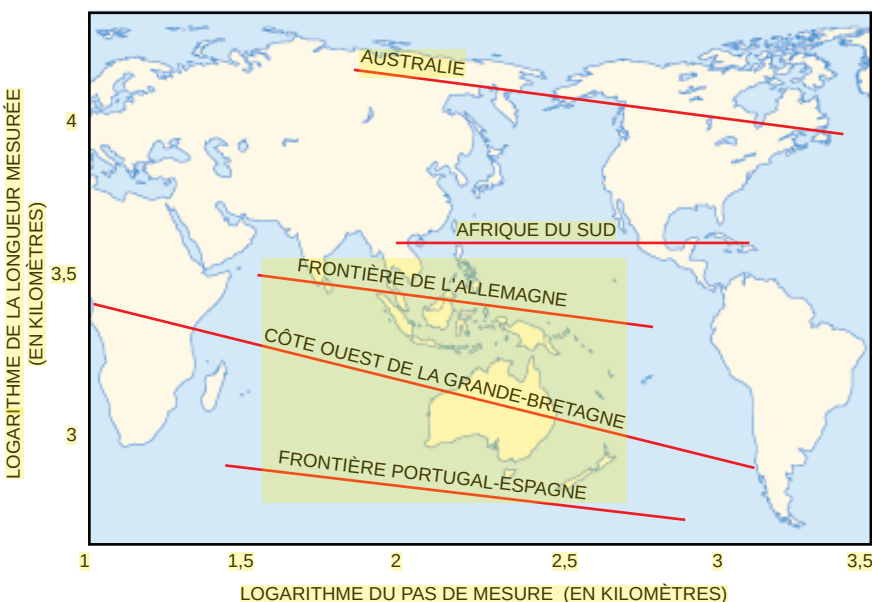
de l'eau sur leur paroi. Dans le cas des digues très amortissantes (ou absorbantes) en raison de leur structure poreuse, on observe que la fréquence de la relaxation est différente selon que la digue est fluviale ou côtière (dans ce dernier cas, la masse d'eau transportée est bien supérieure) ; l'amortissement de la relaxation, lui, semble indépendant de la digue, qu'elles soit fluviale ou côtière.

Un tel résultat est paradoxal en mécanique classique, où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée. Il est pourtant assez général, puisqu'il se manifeste également dans le cas de l'amortissement du vent par le feuillage d'un arbre ou dans le cas de l'amortissement des mouvements de l'air dans les poumons.

Sachant que la nature est une source inépuisable de solutions techniques, nous avons recherché l'essence mathématique d'un tel phénomène, afin d'en tirer des idées directrices pour la conception d'une nouvelle stratégie de commande et d'isolation vibratoire. Nous avons ainsi identifié que la propriété des systèmes fractals nommée récursivité conduit à un amortissement particulièrement efficace, que l'on décrit aujourd'hui par la notion de dérivation non entière.

Côtes, fractales et amortissement

Ces analyses ont conduit, après l'analyse mathématique du phénomène, à la découverte d'une méthode générale de conception de systèmes et, notamment, à un nouveau type de suspension automobile que nous nommons suspension Crone (pour «commande robuste d'ordre non entier»).

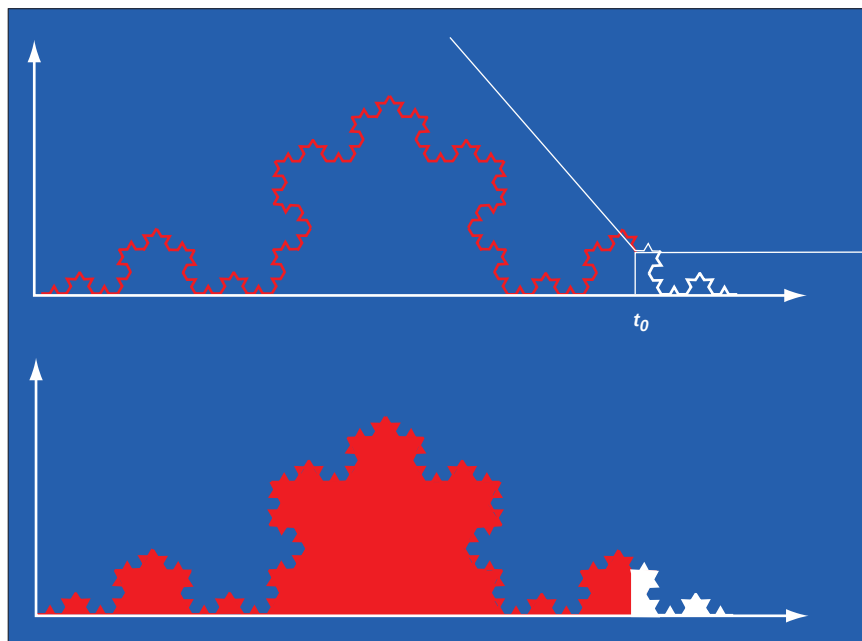
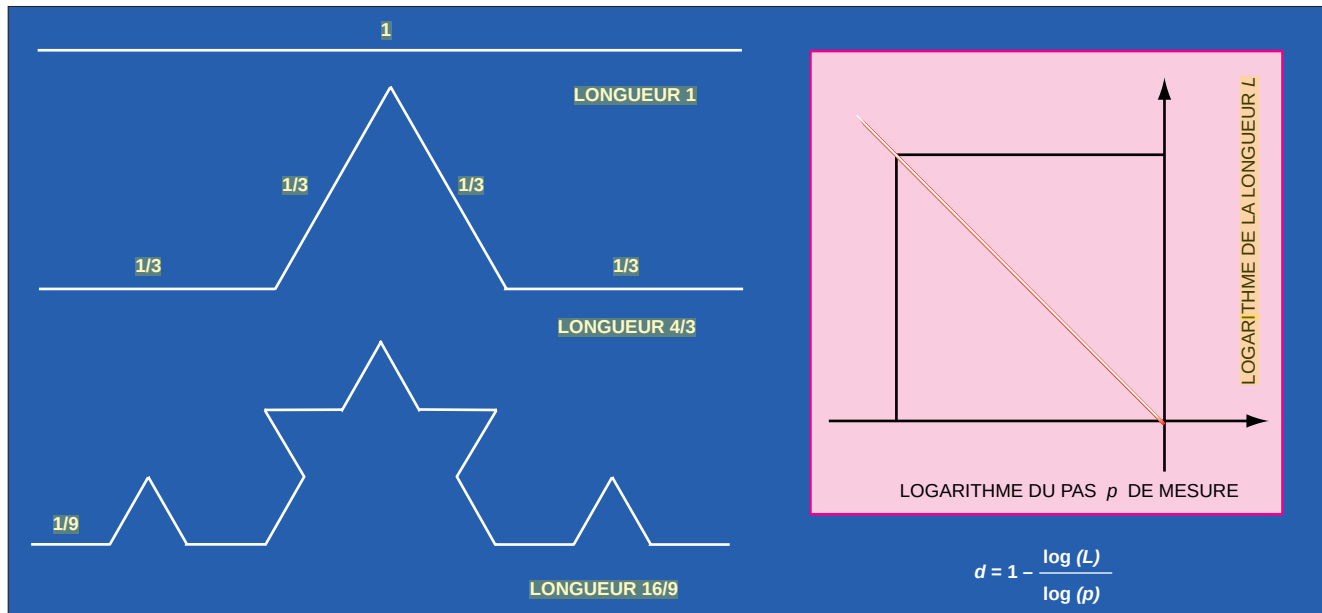


3. LA LONGUEUR DES CÔTES et des frontières dépend de la précision avec laquelle on la mesure : plus le pas de mesure est petit, plus on prend en compte de détails. Pour définir la dimension fractale des objets, on utilise la pente de la droite qui décrit la relation entre la longueur mesurée et le pas de mesure, dans un graphique bilogarithmique.

La notion de fractalité est l'aboutissement des diverses études menées depuis le début du siècle par des mathématiciens qui cherchaient une mesure du caractère désordonné (ou irrégulier) de systèmes naturels. Tout a commencé quand ils ont examiné la notion de mesure. Quelle est, par exemple, la longueur de la côte de la

Bretagne, a demandé le mathématicien français Benoît Mandelbrot? Si l'on mesure cette longueur à l'aide d'une règle de un kilomètre de longueur, on ne tient pas compte des reliefs inférieurs à cette longueur. Avec une règle de un mètre de longueur, on peut prendre en compte les rochers ; avec un pas de un millimètre, on tient

compte des grains de sable. Comme l'utilisation d'une règle de plus en plus petite conduit à prendre en compte des éléments toujours plus petits, les segments de droites sont remplacés par des lignes brisées, et la longueur mesurée augmente quand le pas de mesure diminue. À la limite, quand le pas de mesure devient infiniment



4. LES COURBES fractales sont des exemples de courbes irrégulières que l'on construit en appliquant récursivement une même transformation (en haut, les trois premières étapes de la construction de la courbe de von Koch). Ces courbes ont une dimension dite fractale, comprise entre un (pour les courbes régulières) et deux (pour les surfaces). Les courbes régulières sont dérivables (à droite) : quand on agrandit une partie plusieurs fois de suite, la partie agrandie se présente comme un segment de droite ; c'est une partie de la tangente à la courbe. Les courbes fractales ne sont pas dérivables, parce que chaque point est une singularité (la courbe de von Koch, par exemple, a deux tangentes en chaque point). Pour calculer des dérivées non entières de telles courbes, on ne cherche pas la tangente, puisqu'elle n'est pas définie, mais l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses (en rouge dans le schéma inférieur).

