

petit, la longueur mesurée devient infiniment grande. Ainsi toutes les côtes accidentées ont une longueur infinie, et la longueur classique n'est pas une mesure pertinente des objets naturels désordonnés.

Toutefois la longueur mesurée ne croît pas n'importe comment. En 1953, le mathématicien américain Lewis Fry Richardson a eu l'idée d'étudier expérimentalement la variation de la

longueur mesurée en fonction du pas de mesure. Il a examiné diverses côtes et frontières naturelles terrestres : la côte de l'Australie, de l'Afrique du Sud, la côte Ouest de la Grande-Bretagne, la frontière terrestre de l'Allemagne en 1900, la frontière entre le Portugal et l'Espagne.

Pour chacune, il a porté le logarithme décimal de la longueur mesurée en ordonnée, en fonction du

logarithme décimal du pas de mesure, en abscisse (le logarithme décimal associe la valeur 1 au nombre 10, la valeur 2 à 100, 3 à 1 000, etc.). Richardson a alors observé que, dans un tel graphique, le logarithme de la longueur mesurée croît linéairement vers l'infini quand le pas de mesure tend vers zéro. En outre, la pente des droites du graphique varie selon la nature de la côte ou de la frontière.

Cette pente pouvait-elle mesurer le degré de désordre (ou d'irrégularité)? La linéarité observée correspond à une loi qui indique que la longueur mesurée L est proportionnelle à la longueur du pas de mesure élevée à une puissance $1 - d$. Pour Richardson, le nombre d était un paramètre sans signification particulière, mais, en 1967, B. Mandelbrot proposa de l'interpréter comme une dimension d'espace (qu'il qualifia de fractale pour traduire son caractère fractionnaire).

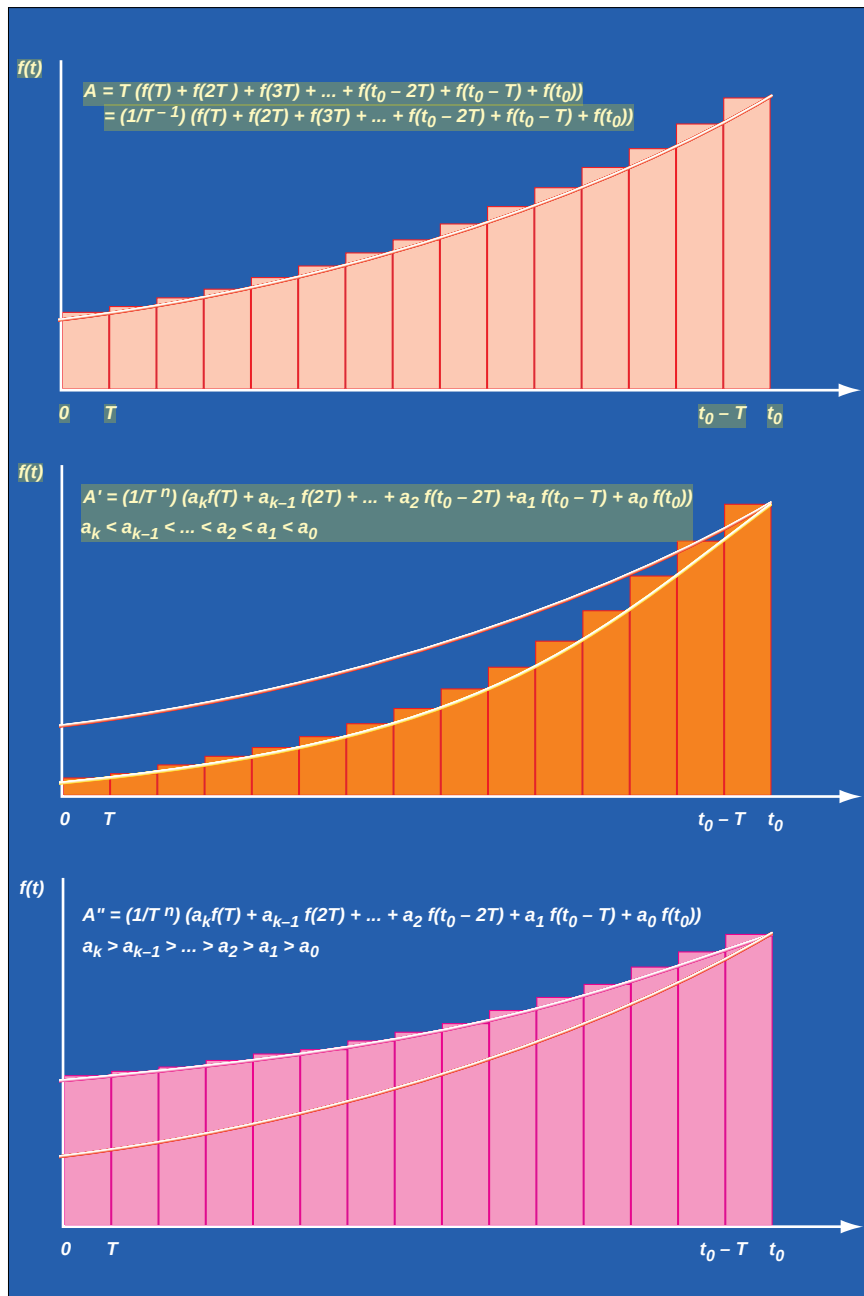
La dimension fractale

Cette idée lui vint quand il observa que la pente correspondant à la côte de l'Afrique du Sud était nulle ($1 - d = 0$) et que, de ce fait, le paramètre d était égal à 1, pour cette côte qui n'est pas accidentée. On retrouvait ainsi la dimension égale à 1 des courbes régulières : un nombre – la distance mesurée le long de la courbe entre un point et une extrémité, choisie comme origine – suffit pour décrire la position de ce point sur la courbe.

Pour les autres côtes étudiées par Richardson, la pente des courbes est négative, et leur dimension fractale est supérieure à 1 ($1 - d < 0$, soit $d > 1$) : ces courbes dites fractales emplissent mieux le plan, de dimension égale à 2, que les courbes régulières, de dimension égale à un. Leur dimension fractale est comprise entre 1 et 2 ; on la calcule aujourd'hui par une formule selon laquelle la dimension fractale est égale à 1 moins le quotient du logarithme de la longueur mesurée par le logarithme de la longueur du pas de mesure.

En appliquant ce résultat à la courbe proposée par von Koch en 1904, nous découvrirons des caractéristiques de la fractalité qui nous serviront ensuite à élaborer des systèmes d'amortissement.

La courbe de von Koch résulte d'un procédé récursif, c'est-à-dire de



5. POUR DÉFINIR LA DÉRIVÉE NON ENTIÈRE d'une courbe (courbe rouge sur la figure supérieure), on commence par remarquer que l'intégrale de la courbe, égale à l'aire sous la courbe) est obtenue par l'opération inverse de la dérivée. Cette intégrale se calcule par exemple, comme la somme d'aires de rectangles (*en haut*). Quand on introduit une mémoire, qui tient différemment compte des valeurs passées de la courbe, on obtient une aire différente qui correspond à une dérivée non entière, d'ordre n supérieur à -1 quand on atténue le passé (*au milieu*), ou d'ordre n inférieur à -1 quand on accentue le passé (*en bas*).