

petit, la longueur mesurée devient infiniment grande. Ainsi toutes les côtes accidentées ont une longueur infinie, et la longueur classique n'est pas une mesure pertinente des objets naturels désordonnés.

Toutefois la longueur mesurée ne croît pas n'importe comment. En 1953, le mathématicien américain Lewis Fry Richardson a eu l'idée d'étudier expérimentalement la variation de la

longueur mesurée en fonction du pas de mesure. Il a examiné diverses côtes et frontières naturelles terrestres : la côte de l'Australie, de l'Afrique du Sud, la côte Ouest de la Grande-Bretagne, la frontière terrestre de l'Allemagne en 1900, la frontière entre le Portugal et l'Espagne.

Pour chacune, il a porté le logarithme décimal de la longueur mesurée en ordonnée, en fonction du

logarithme décimal du pas de mesure, en abscisse (le logarithme décimal associe la valeur 1 au nombre 10, la valeur 2 à 100, 3 à 1 000, etc.). Richardson a alors observé que, dans un tel graphique, le logarithme de la longueur mesurée croît linéairement vers l'infini quand le pas de mesure tend vers zéro. En outre, la pente des droites du graphique varie selon la nature de la côte ou de la frontière.

Cette pente pouvait-elle mesurer le degré de désordre (ou d'irrégularité)? La linéarité observée correspond à une loi qui indique que la longueur mesurée L est proportionnelle à la longueur du pas de mesure élevée à une puissance $1 - d$. Pour Richardson, le nombre d était un paramètre sans signification particulière, mais, en 1967, B. Mandelbrot proposa de l'interpréter comme une dimension d'espace (qu'il qualifia de fractale pour traduire son caractère fractionnaire).

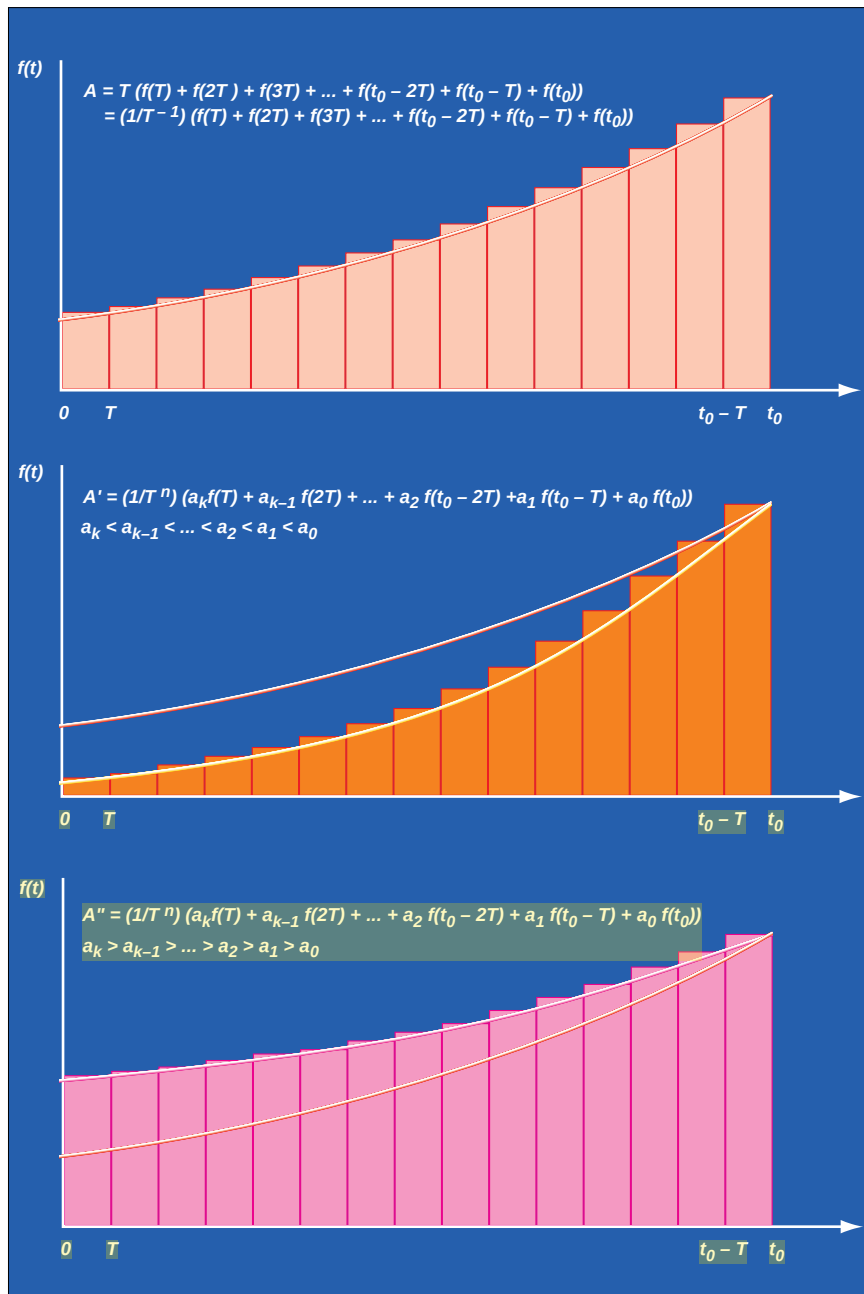
La dimension fractale

Cette idée lui vint quand il observa que la pente correspondant à la côte de l'Afrique du Sud était nulle ($1 - d = 0$) et que, de ce fait, le paramètre d était égal à 1, pour cette côte qui n'est pas accidentée. On retrouvait ainsi la dimension égale à 1 des courbes régulières : un nombre – la distance mesurée le long de la courbe entre un point et une extrémité, choisie comme origine – suffit pour décrire la position de ce point sur la courbe.

Pour les autres côtes étudiées par Richardson, la pente des courbes est négative, et leur dimension fractale est supérieure à 1 ($1 - d < 0$, soit $d > 1$) : ces courbes dites fractales emplissent mieux le plan, de dimension égale à 2, que les courbes régulières, de dimension égale à un. Leur dimension fractale est comprise entre 1 et 2 ; on la calcule aujourd'hui par une formule selon laquelle la dimension fractale est égale à 1 moins le quotient du logarithme de la longueur mesurée par le logarithme de la longueur du pas de mesure.

En appliquant ce résultat à la courbe proposée par von Koch en 1904, nous découvrirons des caractéristiques de la fractalité qui nous serviront ensuite à élaborer des systèmes d'amortissement.

La courbe de von Koch résulte d'un procédé récursif, c'est-à-dire de



5. POUR DÉFINIR LA DÉRIVÉE NON ENTIÈRE d'une courbe (courbe rouge sur la figure supérieure), on commence par remarquer que l'intégrale de la courbe, égale à l'aire sous la courbe) est obtenue par l'opération inverse de la dérivée. Cette intégrale se calcule par exemple, comme la somme d'aires de rectangles (*en haut*). Quand on introduit une mémoire, qui tient différemment compte des valeurs passées de la courbe, on obtient une aire différente qui correspond à une dérivée non entière, d'ordre n supérieur à -1 quand on atténue le passé (*au milieu*), ou d'ordre n inférieur à -1 quand on accentue le passé (*en bas*).

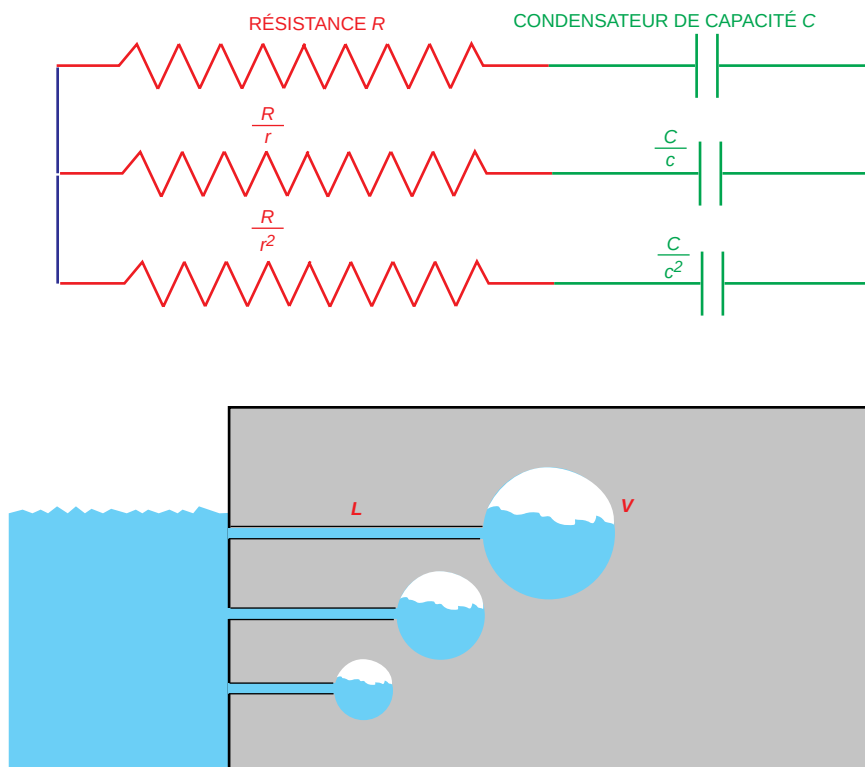
l'application répétée à l'infini d'une même procédure (voir la figure 4). À l'étape 0, on considère un segment de droite de longueur égale à 1. À l'étape 1, on divise ce segment en trois parties égales et l'on remplace la partie médiane par un triangle équilatéral dont on supprime la base. À l'étape 2, on répète la procédure de l'étape 1 à chaque segment de la ligne brisée ainsi obtenue, et ainsi de suite. À la limite, on obtient une figure qui représente plus qu'une ligne ($d > 1$), puisqu'elle est infiniment perturbée, mais moins qu'une surface ($d < 2$), puisqu'elle ne remplit pas complètement le plan. Sa dimension fractale, égale à 1,262, confirme cette perception géométrique.

La dérivation non entière

La dérivation non entière est une opération qui s'impose quand on considère de telles courbes fractales, parce que la dérivation classique n'est plus applicable. Considérons tout d'abord une fonction régulière en fonction du temps, dont la courbe représentative des variations est une courbe continue (voir la figure 4). Observons la courbe dans un petit intervalle de temps, autour d'un instant t_0 : la partie de courbe considérée est un arc. Quand on agrandit la zone d'étude, le segment d'arc devient moins concave. Après un deuxième grossissement, sa concavité diminue encore. Répétée indéfiniment, cette procédure de grossissement conduit progressivement à un segment de droite : une partie de la droite nommée tangente à la courbe au point d'abscisse t_0 . La pente qui mesure l'inclinaison de ce segment de droite est ce que l'on nomme la dérivée (d'ordre 1) de la fonction à l'instant t_0 .

Pour une fonction f dont la courbe représentative est infiniment brisée, comme la courbe de von Koch, la recherche de la tangente n'aboutit pas, parce que, à tout instant t , la procédure de grossissement indiquée précédemment conduit à deux segments de droite, d'inclinaisons différentes. Comme il n'y a aucune raison de privilégier une inclinaison plus qu'une autre, la dérivée à un instant t n'est pas définie. Une courbe fractale n'est pas dérivable.

Pour lever la difficulté, on considère alors l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. Non



6. UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE composé de plusieurs branches identiques amortit bien les impulsions électriques quand les valeurs des capacités et des résistances sont respectivement en progression géométrique. De même, un modèle simplifié de digue garnie d'alvéoles où l'air sert d'amortisseur, reliées à la masse de l'eau par des canaux de différentes longueurs (où l'eau est freinée par des forces visqueuses) amortit bien les vagues.

seulement cette aire reste finie, mais, de surcroît, le caractère perturbé de la courbe a très peu d'effet sur l'aire sous la courbe. Quand on calcule l'aire, à toutes les étapes de la construction de la courbe, on observe qu'elle tend vers une limite. On se propose donc d'utiliser l'aire pour généraliser la notion de dérivation.

Notons que l'utilisation de l'aire fait passer d'une caractérisation locale (la tangente à la courbe à l'instant t_0) ne dépend que des variations de la courbe autour de t_0) à une caractérisation globale : l'aire sous la courbe, entre l'origine et l'instant t_0 , prend en compte tout le passé de la fonction.

Que représente l'aire sous la courbe? Considérons d'abord le cas simple d'une courbe continue telle que celle de la figure 5. Si T désigne une période d'échantillonnage suffisamment petite, on trouve une valeur approchée de l'aire A sous la courbe en calculant la somme de rectangles de largeur T et de hauteur égale à $f(t)$, pour toutes les valeurs de t comprise entre 0 et t_0 . Cette somme est égale au produit de la période T par la somme des valeurs de la fonction à des intervalles de temps espacés de T , entre

0 et t_0 . L'aire ainsi calculée est classiquement nommée l'intégrale de la fonction f , et l'intégrale est l'opération inverse de la dérivée, car la dérivée de la fonction obtenue par intégration est la fonction elle-même. Si la dérivée classique est la dérivée d'ordre 1, l'intégrale peut donc être considérée comme la dérivée d'ordre -1 . Or l'aire peut être exprimée comme le produit de $1/T^{-1}$ par la somme des valeurs de la fonction à des temps espacés de T : la puissance de T , -1 , est l'ordre de dérivation qui correspond, nous l'avons vu, à l'intégration.

Comment passer aux dérivées non entières? Remarquons que l'aire classiquement calculée prend en compte de la même façon les valeurs de la fonction aux temps anciens et aux temps proches du temps t_0 considéré. Définir une dérivée non entière revient à introduire une «mémoire» en accordant moins de poids ou plus de poids aux échantillons les plus anciens (dans la vie courante, le souvenir d'un événement dépend de la nature de cet événement : pour les événements habituels, le souvenir d'événements plus anciens est moindre que celui d'événements plus