

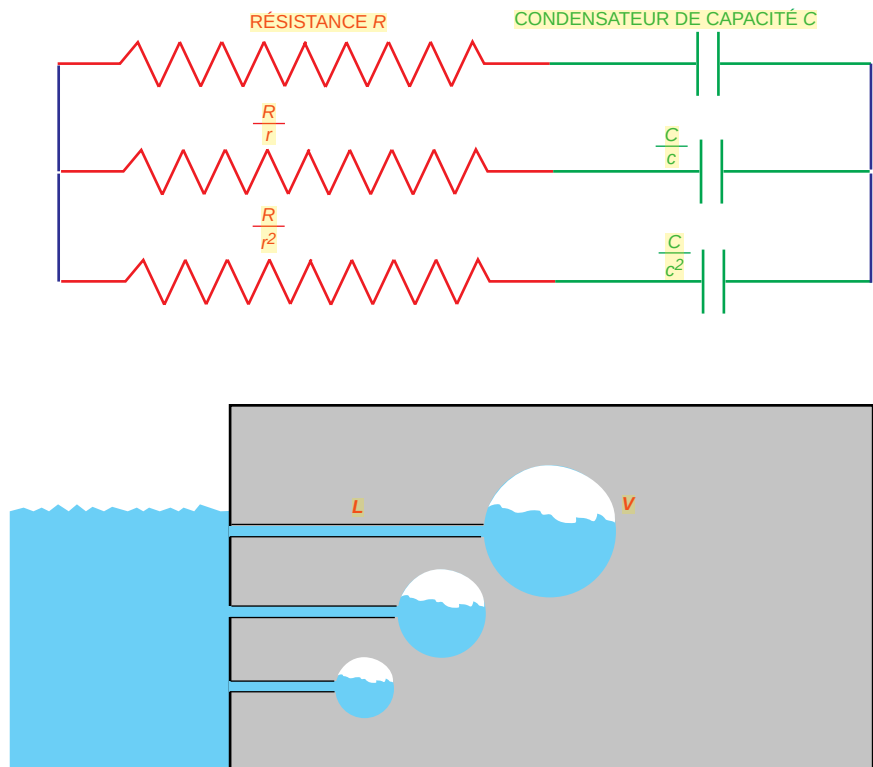
l'application répétée à l'infini d'une même procédure (voir la figure 4). À l'étape 0, on considère un segment de droite de longueur égale à 1. À l'étape 1, on divise ce segment en trois parties égales et l'on remplace la partie médiane par un triangle équilatéral dont on supprime la base. À l'étape 2, on répète la procédure de l'étape 1 à chaque segment de la ligne brisée ainsi obtenue, et ainsi de suite. À la limite, on obtient une figure qui représente plus qu'une ligne ($d > 1$), puisqu'elle est infiniment perturbée, mais moins qu'une surface ($d < 2$), puisqu'elle ne remplit pas complètement le plan. Sa dimension fractale, égale à 1,262, confirme cette perception géométrique.

La dérivation non entière

La dérivation non entière est une opération qui s'impose quand on considère de telles courbes fractales, parce que la dérivation classique n'est plus applicable. Considérons tout d'abord une fonction régulière en fonction du temps, dont la courbe représentative des variations est une courbe continue (voir la figure 4). Observons la courbe dans un petit intervalle de temps, autour d'un instant t_0 : la partie de courbe considérée est un arc. Quand on agrandit la zone d'étude, le segment d'arc devient moins concave. Après un deuxième grossissement, sa concavité diminue encore. Répétée indéfiniment, cette procédure de grossissement conduit progressivement à un segment de droite : une partie de la droite nommée tangente à la courbe au point d'abscisse t_0 . La pente qui mesure l'inclinaison de ce segment de droite est ce que l'on nomme la dérivée (d'ordre 1) de la fonction à l'instant t_0 .

Pour une fonction f dont la courbe représentative est infiniment brisée, comme la courbe de von Koch, la recherche de la tangente n'aboutit pas, parce que, à tout instant t , la procédure de grossissement indiquée précédemment conduit à deux segments de droite, d'inclinaisons différentes. Comme il n'y a aucune raison de privilégier une inclinaison plus qu'une autre, la dérivée à un instant t n'est pas définie. Une courbe fractale n'est pas dérivable.

Pour lever la difficulté, on considère alors l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. Non



6. UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE composé de plusieurs branches identiques amortit bien les impulsions électriques quand les valeurs des capacités et des résistances sont respectivement en progression géométrique. De même, un modèle simplifié de digue garnie d'alvéoles où l'air sert d'amortisseur, reliées à la masse de l'eau par des canaux de différentes longueurs (où l'eau est freinée par des forces visqueuses) amortit bien les vagues.

seulement cette aire reste finie, mais, de surcroît, le caractère perturbé de la courbe a très peu d'effet sur l'aire sous la courbe. Quand on calcule l'aire, à toutes les étapes de la construction de la courbe, on observe qu'elle tend vers une limite. On se propose donc d'utiliser l'aire pour généraliser la notion de dérivation.

Notons que l'utilisation de l'aire fait passer d'une caractérisation locale (la tangente à la courbe à l'instant t_0 ne dépend que des variations de la courbe autour de t_0) à une caractérisation globale : l'aire sous la courbe, entre l'origine et l'instant t_0 , prend en compte tout le passé de la fonction.

Que représente l'aire sous la courbe? Considérons d'abord le cas simple d'une courbe continue telle que celle de la figure 5. Si T désigne une période d'échantillonnage suffisamment petite, on trouve une valeur approchée de l'aire A sous la courbe en calculant la somme de rectangles de largeur T et de hauteur égale à $f(t)$, pour toutes les valeurs de t comprise entre 0 et t_0 . Cette somme est égale au produit de la période T par la somme des valeurs de la fonction à des intervalles de temps espacés de T , entre

0 et t_0 . L'aire ainsi calculée est classiquement nommée l'intégrale de la fonction f , et l'intégrale est l'opération inverse de la dérivée, car la dérivée de la fonction obtenue par intégration est la fonction elle-même. Si la dérivée classique est la dérivée d'ordre 1, l'intégrale peut donc être considérée comme la dérivée d'ordre -1 . Or l'aire peut être exprimée comme le produit de $1/T^{-1}$ par la somme des valeurs de la fonction à des temps espacés de T : la puissance de T , -1 , est l'ordre de dérivation qui correspond, nous l'avons vu, à l'intégration.

Comment passer aux dérivées non entières? Remarquons que l'aire classiquement calculée prend en compte de la même façon les valeurs de la fonction aux temps anciens et aux temps proches du temps t_0 considéré. Définir une dérivée non entière revient à introduire une «mémoire» en accordant moins de poids ou plus de poids aux échantillons les plus anciens (dans la vie courante, le souvenir d'un événement dépend de la nature de cet événement : pour les événements habituels, le souvenir d'événements plus anciens est moindre que celui d'événements plus

récents ; pour des événements inhabituels, le souvenir d'événements plus anciens peut se révéler plus importants que celui d'événements plus récents).

En tenant ainsi compte des valeurs passées d'une courbe par une pondération (on peut au choix atténuer ou renforcer le passé), on obtient des aires A' et A'' qui sont égales au produit de $1/T^n$ par une somme pondérée de valeurs de la fonction f . Cette expression généra-

lise la notion de dérivée à l'ordre n si les coefficients de pondération vérifient une relation qui dépend de n . L'expression obtenue tient compte des valeurs de la fonction à tous les instants du passé. Quand n est égal à -1 , il n'y a aucune pondération du passé ; pour n supérieur à -1 , le passé est atténué ; et pour n inférieur à -1 , le passé est accentué.

Un tel souci d'obtenir des ordres de dérivation non entiers remonte au

début du XIX^e siècle : le mathématicien allemand Bernhard Riemann, et les mathématiciens français Joseph Liouville ou Augustin Cauchy donnèrent une première formulation mathématique de la dérivation non entière.

Le souci d'assurer la continuité de la dimension d'espace est plus récent, puisque c'est seulement au XX^e siècle que l'on a identifié des dimensions non entières d'espace. Et c'est enfin dans la seconde moitié de ce siècle que l'on a identifié l'interdépendance de la fractalité et de la dérivation non entière en trouvant une relation entre l'ordre non entier de dérivation et la dimension fractale.

De la dérivée au circuit électrique

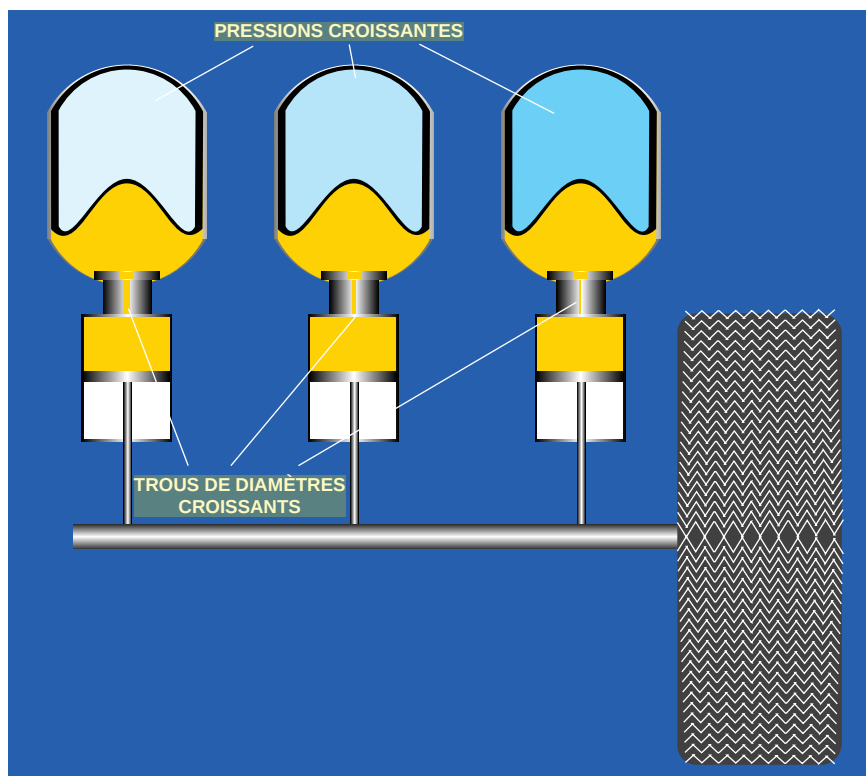
Si la fractalité relève de la géométrie, la dérivation non entière relève de la dynamique des systèmes. L'interdépendance de ces deux concepts n'apparaît donc que lorsqu'il y a corrélation de la géométrie et de la dynamique. Mieux encore, la construction de la courbe de von Koch montre qu'une caractéristique essentielle de la fractalité est la récursivité, c'est-à-dire la répétition du procédé de construction. Celle-ci serait-elle suffisante ? Oui : nous avons montré que la dérivation non entière résulte plus de la récursivité (qu'elle soit ou non d'origine fractale) que de la fractalité ; une géométrie récursive fractale n'est pas nécessaire à l'obtention d'une dérivation non entière, mais une géométrie récursive l'est.

Nous fondant sur ces idées, nous avons construit en 1975 une classe de systèmes que nous avons nommés «dérivateurs non entiers bornés en fréquence», à l'aide de résistances et de condensateurs (électriques, hydrauliques ou pneumatiques).

Examinons d'abord un système électrique : nous associons récursivement, en parallèle, des cellules composées d'une résistance et d'un condensateur en série. À l'étape 0, nous utilisons une cellule composée d'une seule résistance en série avec un seul condensateur ; c'est ce que l'on nomme une cellule RC série. À l'étape 1, on branche en parallèle sur cette cellule une autre cellule RC série, dont la résistance est divisée par r et dont la capacité est divisée par c . À l'étape 2, on branche en parallèle sur



A. Oustaloup



7. LA SUSPENSION CRONE est construite sur le principe du circuit électrique de la figure 6. Des sphères contenant un gaz à différentes pressions sont reliées à l'arbre de la roue par des systèmes hydrauliques où l'huile s'écoule plus ou moins difficilement (en bas).