

récents ; pour des événements inhabituels, le souvenir d'événements plus anciens peut se révéler plus importants que celui d'événements plus récents).

En tenant ainsi compte des valeurs passées d'une courbe par une pondération (on peut au choix atténuer ou renforcer le passé), on obtient des aires A' et A'' qui sont égales au produit de $1/T^n$ par une somme pondérée de valeurs de la fonction f . Cette expression généra-

lise la notion de dérivée à l'ordre n si les coefficients de pondération vérifient une relation qui dépend de n . L'expression obtenue tient compte des valeurs de la fonction à tous les instants du passé. Quand n est égal à -1 , il n'y a aucune pondération du passé ; pour n supérieur à -1 , le passé est atténué ; et pour n inférieur à -1 , le passé est accentué.

Un tel souci d'obtenir des ordres de dérivation non entiers remonte au

début du XIX^e siècle : le mathématicien allemand Bernhard Riemann, et les mathématiciens français Joseph Liouville ou Augustin Cauchy donnèrent une première formulation mathématique de la dérivation non entière.

Le souci d'assurer la continuité de la dimension d'espace est plus récent, puisque c'est seulement au XX^e siècle que l'on a identifié des dimensions non entières d'espace. Et c'est enfin dans la seconde moitié de ce siècle que l'on a identifié l'interdépendance de la fractalité et de la dérivation non entière en trouvant une relation entre l'ordre non entier de dérivation et la dimension fractale.

De la dérivée au circuit électrique

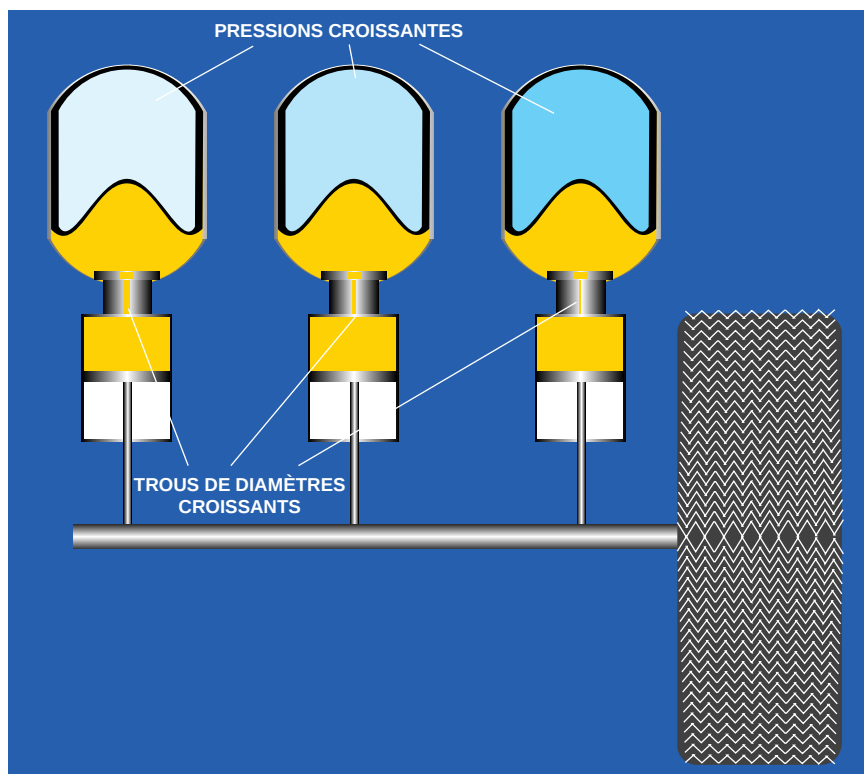
Si la fractalité relève de la géométrie, la dérivation non entière relève de la dynamique des systèmes. L'interdépendance de ces deux concepts n'apparaît donc que lorsqu'il y a corrélation de la géométrie et de la dynamique. Mieux encore, la construction de la courbe de von Koch montre qu'une caractéristique essentielle de la fractalité est la récursivité, c'est-à-dire la répétition du procédé de construction. Celle-ci serait-elle suffisante ? Oui : nous avons montré que la dérivation non entière résulte plus de la récursivité (qu'elle soit ou non d'origine fractale) que de la fractalité ; une géométrie récursive fractale n'est pas nécessaire à l'obtention d'une dérivation non entière, mais une géométrie récursive l'est.

Nous fondant sur ces idées, nous avons construit en 1975 une classe de systèmes que nous avons nommés «dérivateurs non entiers bornés en fréquence», à l'aide de résistances et de condensateurs (électriques, hydrauliques ou pneumatiques).

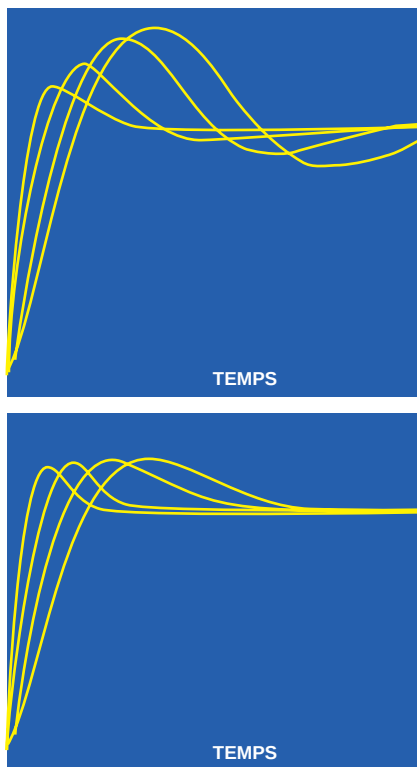
Examinons d'abord un système électrique : nous associons récursivement, en parallèle, des cellules composées d'une résistance et d'un condensateur en série. À l'étape 0, nous utilisons une cellule composée d'une seule résistance en série avec un seul condensateur ; c'est ce que l'on nomme une cellule RC série. À l'étape 1, on branche en parallèle sur cette cellule une autre cellule RC série, dont la résistance est divisée par r et dont la capacité est divisée par c . À l'étape 2, on branche en parallèle sur



A. Oustaloup



7. LA SUSPENSION CRONE est construite sur le principe du circuit électrique de la figure 6. Des sphères contenant un gaz à différentes pressions sont reliées à l'arbre de la roue par des systèmes hydrauliques où l'huile s'écoule plus ou moins difficilement (en bas).



8. L'AMORTISSEMENT assuré par une suspension Crone (en bas) ne dépend pas de la charge de la voiture, contrairement à l'amortissement classique (en haut). Sur ces diagrammes, on a indiqué la réaction à une sollicitation de la roue de type marche. La suspension Crone, de surcroît, limite l'amplitude des oscillations.

les deux premières cellules une autre cellule RC série dont la résistance est divisée par r^2 et la capacité par c^2 .

Après avoir ainsi disposé une dizaine de cellules, on obtient un circuit qui présente un comportement de dérivation non entière sur une plage de fréquences extrêmement large : quand on applique une tension sinusoïdale à un tel circuit, le courant est déphasé d'une valeur qui dépend des paramètres r et c et qui reste constante sur dix millions de hertz (généralement, les circuits qui déphasent les signaux électriques ont un comportement qui dépend fortement de la fréquence).

Les rapports constants r et c , entre les résistances et les capacités des cellules consécutives, sont nommés facteurs récursifs ; ils déterminent l'ordre non entier n de dérivation entre la tension et le courant, qui s'exprime en l'occurrence par la relation $n = \log(r)/\log(rc)$. La disposition récursive des résistances et des capacités se traduit par une distribution récursive des constantes de temps et des modes de relaxation.

Plus généralement, la dispersion des dynamiques qu'entraîne la récur-

sivité est à l'origine du caractère stabilisant du désordre dans la nature. C'est donc la récursivité qui est le maître phénomène : c'est la particularité du désordre qu'il convient d'exploiter judicieusement dans la conception des systèmes dynamiques, notamment en retenant la notion de récursivité de nature non fractale.

Digues et suspension

Afin de transposer directement ces résultats à des systèmes d'amortissement mécanique, nous avons étudié le comportement de digues poreuses. Les cavités du milieu poreux que constitue la digue forment comme un ensemble de branches composées chacune d'un canal et d'une alvéole (voir la figure 7).

Le modèle hydraulique simplifié de l'interface eau-digue est analogue à l'arrangement en parallèle de cellules RC série : une distribution récursive des pertes d'énergie dans les canaux se traduit par une distribution récursive des résistances hydrauliques, et une distribution récursive des énergies potentielles d'élasticité dans les alvéoles se traduit par une distribution récursive des capacités hydrauliques.

Autrement dit, le modèle hydraulique est l'analogue exact du système parallèle récursif de cellules RC série envisagé précédemment : l'ordre non entier de dérivation, entre le débit de l'eau et la pression P à l'interface eau-digue, est déterminé par les rapports constants r et c entre les résistances hydrauliques et les capacités hydrauliques de deux cellules consécutives.

Pour passer de la digue poreuse à la suspension Crone, il suffit de tourner d'un quart de tour la représentation de la digue, de mettre l'eau en

mouvement par un piston lié à la roue, de remplacer l'eau par de l'huile. On obtient ainsi le schéma de principe de la version hydropneumatique de la suspension Crone.

Trois cellules au moins sont nécessaires pour définir des rapports constants entre les coefficients de frottement visqueux et les raideurs des amortisseurs et des ressorts de deux cellules consécutives. En pratique, trois cellules sont suffisantes pour couvrir la plage des fréquences qui comprend la fréquence propre de la caisse, qui est de l'ordre du hertz (une oscillation par seconde), et la fréquence propre de la roue, comprise entre 15 et 20 hertz. La récursivité des coefficients de frottement visqueux est assurée par des trous de laminage de diamètres différents. Quant à la récursivité des raideurs, elle est assurée par des sphères où du gaz est placé à des pressions différentes (de la sorte, on peut utiliser des sphères toutes de même taille).

Pour une masse suspendue variant d'un facteur six, entre 150 et 900 kilogrammes, la figure 8 illustre, comparativement à une suspension classique, les réactions de la caisse à une sollicitation de type marche de la roue. Ces réactions montrent que le premier dépassement et l'amortissement restent constants, traduisant une bien meilleure robustesse de la suspension Crone.

Nous avons cherché à valoriser l'approche conceptuelle ainsi mise au point en l'appliquant au secteur automobile. En collaboration avec le groupe PSA, nous avons implanté la suspension Crone sur une Citroën BX expérimentale. Notre réalisation a été récompensée par le trophée AFCT'95, qui distingue la meilleure innovation technique dans le cadre des relations université-industrie.

Alain OUSTALOUP est directeur adjoint du Laboratoire d'automatique et de productique de l'Université de Bordeaux I et de l'ENSERB. Il a reçu la médaille d'argent du CNRS en 1997.

Alain OUSTALOUP, *La commande Crone*, Éditions Hermès, Paris, 1991.

Alain OUSTALOUP, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Éditions Hermès, Paris, 1995.

A. OUSTALOUP, B. MATHIEU et P. LANUSSE, *The Crone Control of Resonant Plants : Application to a Flexible*

Transmission, in *European Journal of Control*, vol. 1, n° 2, pp. 113-121, Éditions Springer, 1995.

A. OUSTALOUP, X. MOREAU et M. NOUILLANT, *The Crone Suspension*, in *Control Engineering Practice*, vol. 4, n° 8, pp. 1101-1108, 1996.

A. OUSTALOUP, F. LEVRON, F. NANOT et B. MATHIEU, *Frequency Band Complex Non Integer Derivator : Characterization and Synthesis*, in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, à paraître.