

qu'ils contiennent? On en arrive aux problèmes de l'organisation de la matière et de son évolution vers une complexité croissante, matière divisée, condensée, organisée, matière vivante, matière pensante. Un vaste programme !

Mes conseils pratiques à un jeune chimiste? Apprends pour comprendre bien sûr, mais, surtout, garde un contact direct avec la matière, fais des expériences pour cultiver cette faculté de transformer la matière. Toutefois, ne reste pas

le nez collé à la paillasse, car ce métier de chimiste est aussi plein de grandes idées. Regarde autour de toi les grandes questions et traduis-les dans ton langage de chimiste. S'il y a un risque de te laisser griser par des idées générales, la paillasse te ramènera au concret, à la réalisation qui laisse sa marque dans la matière. La chimie aide à suivre le précepte de San Antonio : «Dans la vie, il faut choisir, mon prince, s'écouter parler ou se faire entendre». Sois donc fier

de ce que tu fais, de ce pouvoir sur la matière que te donne la chimie, de cette capacité qu'elle a de créer molécules nouvelles et matériaux nouveaux, qui relève d'une faculté créatrice, semblable à celle de l'art.

Jean-Marie LEHN est professeur au Collège de France et directeur du Laboratoire de chimie supramoléculaire ISIS – ULP-CNRS ESA-7006, à Strasbourg.



L'intelligence en mathématique

ALAIN CONNES

J'éprouve une certaine réticence à parler d'intelligence, car j'ai toujours considéré les mathématiques comme une école quotidienne d'humilité. Je me méfie lorsqu'un mathématicien se vante de ses succès sans mentionner ses échecs. En revanche, je saisis volontiers l'occasion de parler de mathématiques et de la difficulté qu'il y a à décrire de l'extérieur l'activité du mathématicien : l'employée de maison d'un mathématicien célèbre, interrogée sur l'activité de celui-ci, répondit qu'il passait son temps, dans son bureau, à écrire sur des bouts de papier qu'il jetait ensuite consciencieusement à la poubelle. L'activité du mathématicien pose ainsi un problème spécifique qui a trait à la nature de la réalité mathématique.

Si toute science ne se réduit pas à son objet, le physicien, le chimiste, le géologue ou l'astronome savent quel est l'objet de leur travail : à diverses échelles, ils étudient la structure et l'organisation de la matière. L'existence d'un monde matériel extérieur est un *a priori* simple, qui n'est remis en cause qu'en mécanique quantique. La distinction entre invention et découverte est également claire : on invente des outils nouveaux d'exploration, tel le microscope à effet tunnel ; on découvre des structures, telle la double hélice de l'ADN.

En mathématiques, le problème est différent : l'évidence des considérations précédentes fait place à une interrogation philosophique légitime devant la difficulté qu'il y a, pour un mathématicien, à spécifier, devant un matérialiste pur et

dur, la nature de la réalité mathématique et du travail de mathématicien. Pour situer le problème, il convient d'opposer, d'une part, les «platoniciens», qui se considèrent comme les explorateurs d'un «monde mathématique» dont l'existence ne fait pour eux aucun doute et dont ils découvrent la structure et, d'autre part, les «formalistes» qui se retranchent derrière une attitude sceptique, les mathématiques n'étant pour eux qu'une suite de déductions logiques dans un système formel, une sorte de langage purifié.

Pour le non-mathématicien, les mathématiques apparaissent trop souvent comme un jeu sans autre objet que celui d'aiguiser l'acuité intellectuelle ; elles sont généralement rencontrées et utilisées comme un langage. Le chimiste ou le biologiste, par exemple, doivent parfois utiliser le langage mathématique pour préciser leur pensée. Cette utilisation du langage mathématique, avec l'intérêt génératif et déductif qui est propre à tout langage, donne au scientifique non mathématicien l'impression de comprendre le sens des mathématiques, en même temps qu'elle fait croire que les mathématiques se réduisent à un langage. Ce point de vue est cohérent avec celui des formalistes, qui a donc *a priori* la sympathie du scientifique non mathématicien.

Les mathématiciens ont deux sources vigoureuses d'expérimentation et d'information directes : l'espace physique, source de la géométrie, et les entiers naturels, source de la théorie des nombres. Un nombre entier est premier, tel 1997,

s'il n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même. Une expérimentation simple avec les nombres, par exemple compris entre 1 et 100 ou entre 1 et 1 000, montre que la liste des nombres premiers semble continuer indéfiniment. Une exploration plus poussée, à l'aide d'un ordinateur, n'infirmes pas cette impression, mais ne peut en rien la prouver, puisque la vérification d'un tel énoncé nécessiterait une infinité de calculs (c'est ce que l'on appelle un énoncé de type universel).

Le travail du mathématicien consiste à remplacer la constatation expérimentale par une preuve. Pour les nombres premiers, ce travail remonte à Euclide. Que dit le résultat? Qu'à toute personne qui prétendra avoir trouvé le plus grand de tous les nombres premiers, disons $2^{132\,049} - 1$, on pourra rétorquer «vous vous trompez» et expliquer une méthode par laquelle on trouvera un nombre premier plus grand. On se heurte ainsi à une réalité, tout aussi contraignante que la réalité extérieure familière ; dit autrement, peu importe le temps que nous laisserions à quelqu'un pour trouver le plus grand nombre premier, nous savons l'entreprise vouée à l'échec.

En démontrant qu'il n'existe pas de plus grand nombre premier, le mathématicien réussit à dévoiler un aspect – ici, l'infinité des nombres premiers – d'une réalité tout aussi mystérieuse et *a priori* incohérente que la réalité qui nous entoure. S'il veut entrevoir comment cette infinité de nombres premiers est répartie parmi les nombres entiers, l'expérimentation peut être largement aussi déroutante que n'importe quelle exploration du monde

extérieur. Par exemple, 1999 est également un nombre premier, de sorte que 1997 et 1999 sont des nombres premiers jumeaux ; existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux ? On l'ignore. D'autre part, la réalité mathématique a la même «extraordinaire intelligibilité» que la réalité extérieure et, pour ne prendre qu'un exemple, la célèbre conjecture du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) sur les zéros de la fonction zêta (toujours non démontrée) signifie qu'avec une erreur de l'ordre de la racine carrée de n multipliée par le nombre de chiffres de n , le nombre de nombres premiers inférieurs à n est donné par une fonction nommée logarithme intégral $Li(n)$.

L'essence du travail mathématique est l'élaboration des concepts et des outils qui, éventuellement, rendent accessible la solution de quelques problèmes fondamentaux. En un sens, le mathématicien essaie de percevoir et de comprendre la réalité mathématique primitive, brute, non structurée *a priori*. Que cette réalité ne soit pas localisable dans l'espace-temps a peu d'importance ; elle n'en est pas moins accessible, ne serait-ce qu'expérimentalement, grâce à l'ordinateur. Les mathématiciens donnent ainsi un accès direct, d'emblée, par la pensée pure, à une entité sans limite. Un ami me racontait sa surprise lorsqu'un jour, pendant les grandes vacances, son fils âgé de cinq ans vint le trouver après avoir passé une heure sur la plage avec cet air soufifreux caractéristique de la réflexion intense, et lui dit : «Papa, il n'y a pas de plus grand nombre...»

Je pense que l'acte créateur, en mathématiques, s'effectue par le langage, lors du découpage conceptuel de la réalité mathématique. Pour créer des mathématiques, on doit ainsi faire la distinction entre, d'une part, une réalité mathématique brute, initialement étiquetée de manière inductive avec une large part d'arbitraire, telle que les entiers dans le système décimal, et, d'autre part, le système formel, de nature axiomatique déductive, que le cerveau humain met au point pour percevoir et appréhender cette réalité mathématique brute.

Un fait empirique de l'arithmétique a bien peu de chances d'être compris s'il ne se formule pas de manière naturelle et esthétique dans le langage du système formel du mathématicien. Ainsi le problème de Fermat n'est devenu réellement accessible qu'à la fin des années 1980, grâce à la théorie des courbes elliptiques. Même quand une formulation conceptuelle a été trouvée, comme pour l'hypothèse de Riemann, le problème peut rester trop difficile, mais le mathématicien a au moins la possibilité de considérer un problème analogue, transplanté en quelque sorte dans une situation

voisine plus simple. La résolution du problème analogue éclaire bien souvent le cas initial et permet d'avancer vers sa solution.

En conclusion, examinons en quel sens les travaux de Kurt Gödel ont mis un point final à la tentation réductionniste des formalistes, et comment ils permettent de distinguer la réalité mathématique primitive du système de perception que le cerveau humain élabore pour comprendre et explorer cette réalité. Les formalistes pensent que les mathématiques sont uniquement des constructions hypothético-déductives, élaborées par l'homme, et dont le trait essentiel est d'être exemptes de contradictions. Ce point de vue a été systématisé par le mathématicien David Hilbert, qui voulait définir clairement et sans ambiguïté ce qu'est une démonstration mathématique. Hilbert a ainsi introduit la notion de système formel. Un tel système est donné par un alphabet fini, une grammaire qui spécifie ce qu'est un énoncé cohérent, un nombre fini de propositions supposées vraies, ou axiomes, et des règles d'inférence logique qui permettent de procéder à des déductions.

Les mathématiciens espéraient réduire les mathématiques à un tel langage formel. Si ce rêve avait abouti, le point de vue exprimé par les formalistes aurait été parfaitement justifié et il aurait été tentant de réduire les mathématiques à un langage. Les travaux de Gödel, aux environs de 1930, ont donné une réponse négative et définitive à ces espoirs de formalisation. On mentionne souvent l'«indécidabilité» démontrée par Gödel (on ne pourra jamais savoir si certains énoncés sont vrais ou faux), mais l'énoncé le plus fort et le plus troublant pour les formalistes est bien le suivant : «Pour tout système déductif formel S non contradictoire, il existe un énoncé vrai portant sur l'arithmétique des entiers naturels, et qui est indémontrable dans S ».

Il peut surprendre, au premier abord, qu'un énoncé arithmétique puisse être vrai sans être démontrable. En l'occurrence, il s'agit d'un énoncé universel, c'est-à-dire de la forme «Pour tout entier n , une certaine propriété $P(n)$ est satisfaite». Si l'on démontre un tel énoncé, sa véracité en découle, mais il peut très bien être vrai, au sens où, pour toute valeur de n , on a $P(n)$, sans pour autant que $P(n)$ soit démontrable!

Ainsi un système déductif formel, c'est-à-dire l'outil projectif que nous mettons au point grâce à notre cerveau pour percevoir la réalité mathématique, ne peut épuiser même les propriétés des entiers naturels. L'information contenue dans la réalité primitive, brute, des entiers naturels n'est pas de type fini, et elle échappera à toute tentative de réduction aux

déductions d'un langage formel. Ce résultat montre clairement la distinction entre cette réalité mathématique primitive et le système déductif que l'homme élabore pour l'analyser et la comprendre. Il est clair que ce système est une élaboration de notre cerveau, et qu'il a une évolution presque biologique, par sélection et intégration au «corpus culturel» des mathématiques engrangées dans les bibliothèques. Mais si on l'oppose à la réalité mathématique primitive qu'il a pour objet, on y gagne sur le plan conceptuel, en éliminant le côté négatif du théorème de Gödel, et même sur la compréhension de la pratique du mathématicien.

Les mathématiciens ont d'ailleurs, en général, un sens aigu de la distinction qui existe entre (1) mettre au point des outils, (2) soulever un coin du voile qui recouvre la réalité mathématique primitive. Ainsi un outil nouveau n'acquiert vraiment droit à autre chose qu'à une bienveillante méfiance que quand il a été essentiel dans ce que les Anglo-Saxons appellent fort justement un *breakthrough*, un passage en force à travers le voile qui nous aveugle.

Il n'y a pas de recette générale pour réussir une telle avancée ; ce serait trop simple ! L'expérience montre que chaque mathématicien est un cas particulier. Tout au plus peut-on rappeler quelques règles élémentaires : par exemple, on ne doit jamais se précipiter pour lire une démonstration sans d'abord chercher à la trouver par soi-même. Des astuces aident à se concentrer plus facilement, comme de n'interrompre un travail de rédaction qu'au milieu d'une démonstration. On peut aussi donner l'exemple de John Conway (mathématicien de Princeton) qui a programmé son ordinateur pour que ce dernier lui pose chaque matin une question du style : «Quel jour de la semaine est le 21 janvier 1838?». Si J. Conway ne répond pas en moins de 30 secondes, l'ordinateur refuse de s'ouvrir.

Il n'est pas clair que les découvertes récentes sur le fonctionnement du cerveau nous soient plus utiles que les enseignements du petit livre de Jacques Hadamard (que je recommande) sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Vouloir réduire la réalité mathématique à des états physiques des neurones du cerveau, c'est un peu vouloir réduire la littérature à des réactions entre molécules d'encre et de papier, et le café reste jusqu'à nouvel ordre la meilleure drogue pour démontrer des théorèmes.

Alain CONNES est professeur à l'Institut des hautes études scientifiques, à Bures-sur-Yvette.
