

extérieur. Par exemple, 1999 est également un nombre premier, de sorte que 1997 et 1999 sont des nombres premiers jumeaux ; existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux ? On l'ignore. D'autre part, la réalité mathématique a la même «extraordinaire intelligibilité» que la réalité extérieure et, pour ne prendre qu'un exemple, la célèbre conjecture du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) sur les zéros de la fonction zêta (toujours non démontrée) signifie qu'avec une erreur de l'ordre de la racine carrée de n multipliée par le nombre de chiffres de n , le nombre de nombres premiers inférieurs à n est donné par une fonction nommée logarithme intégral $Li(n)$.

L'essence du travail mathématique est l'élaboration des concepts et des outils qui, éventuellement, rendent accessible la solution de quelques problèmes fondamentaux. En un sens, le mathématicien essaie de percevoir et de comprendre la réalité mathématique primitive, brute, non structurée *a priori*. Que cette réalité ne soit pas localisable dans l'espace-temps à peu d'importance ; elle n'en est pas moins accessible, ne serait-ce qu'expérimentalement, grâce à l'ordinateur. Les mathématiciens donnent ainsi un accès direct, d'emblée, par la pensée pure, à une entité sans limite. Un ami me racontait sa surprise lorsqu'un jour, pendant les grandes vacances, son fils âgé de cinq ans vint le trouver après avoir passé une heure sur la plage avec cet air soufiteux caractéristique de la réflexion intense, et lui dit : «Papa, il n'y a pas de plus grand nombre...»

Je pense que l'acte créateur, en mathématiques, s'effectue par le langage, lors du découpage conceptuel de la réalité mathématique. Pour créer des mathématiques, on doit ainsi faire la distinction entre, d'une part, une réalité mathématique brute, initialement étiquetée de manière inductive avec une large part d'arbitraire, telle que les entiers dans le système décimal, et, d'autre part, le système formel, de nature axiomatique déductive, que le cerveau humain met au point pour percevoir et appréhender cette réalité mathématique brute.

Un fait empirique de l'arithmétique a bien peu de chances d'être compris s'il ne se formule pas de manière naturelle et esthétique dans le langage du système formel du mathématicien. Ainsi le problème de Fermat n'est devenu réellement accessible qu'à la fin des années 1980, grâce à la théorie des courbes elliptiques. Même quand une formulation conceptuelle a été trouvée, comme pour l'hypothèse de Riemann, le problème peut rester trop difficile, mais le mathématicien a au moins la possibilité de considérer un problème analogue, transplanté en quelque sorte dans une situation

voisine plus simple. La résolution du problème analogue éclaire bien souvent le cas initial et permet d'avancer vers sa solution.

En conclusion, examinons en quel sens les travaux de Kurt Gödel ont mis un point final à la tentation réductionniste des formalistes, et comment ils permettent de distinguer la réalité mathématique primitive du système de perception que le cerveau humain élabore pour comprendre et explorer cette réalité. Les formalistes pensent que les mathématiques sont uniquement des constructions hypothético-déductives, élaborées par l'homme, et dont le trait essentiel est d'être exemptes de contradictions. Ce point de vue a été systématisé par le mathématicien David Hilbert, qui voulait définir clairement et sans ambiguïté ce qu'est une démonstration mathématique. Hilbert a ainsi introduit la notion de système formel. Un tel système est donné par un alphabet fini, une grammaire qui spécifie ce qu'est un énoncé cohérent, un nombre fini de propositions supposées vraies, ou axiomes, et des règles d'inférence logique qui permettent de procéder à des déductions.

Les mathématiciens espéraient réduire les mathématiques à un tel langage formel. Si ce rêve avait abouti, le point de vue exprimé par les formalistes aurait été parfaitement justifié et il aurait été tentant de réduire les mathématiques à un langage. Les travaux de Gödel, aux environs de 1930, ont donné une réponse négative et définitive à ces espoirs de formalisation. On mentionne souvent l'«indécidabilité» démontrée par Gödel (on ne pourra jamais savoir si certains énoncés sont vrais ou faux), mais l'énoncé le plus fort et le plus troublant pour les formalistes est bien le suivant : «Pour tout système déductif formel S non contradictoire, il existe un énoncé vrai portant sur l'arithmétique des entiers naturels, et qui est indémontrable dans S ».

Il peut surprendre, au premier abord, qu'un énoncé arithmétique puisse être vrai sans être démontrable. En l'occurrence, il s'agit d'un énoncé universel, c'est-à-dire de la forme «Pour tout entier n , une certaine propriété $P(n)$ est satisfaite». Si l'on démontre un tel énoncé, sa véracité en découle, mais il peut très bien être vrai, au sens où, pour toute valeur de n , on a $P(n)$, sans pour autant que $P(n)$ soit démontrable!

Ainsi un système déductif formel, c'est-à-dire l'outil projectif que nous mettons au point grâce à notre cerveau pour percevoir la réalité mathématique, ne peut épuiser même les propriétés des entiers naturels. L'information contenue dans la réalité primitive, brute, des entiers naturels n'est pas de type fini, et elle échappera à toute tentative de réduction aux

déductions d'un langage formel. Ce résultat montre clairement la distinction entre cette réalité mathématique primitive et le système déductif que l'homme élabore pour l'analyser et la comprendre. Il est clair que ce système est une élaboration de notre cerveau, et qu'il a une évolution presque biologique, par sélection et intégration au «corpus culturel» des mathématiques engrangées dans les bibliothèques. Mais si on l'oppose à la réalité mathématique primitive qu'il a pour objet, on y gagne sur le plan conceptuel, en éliminant le côté négatif du théorème de Gödel, et même sur la compréhension de la pratique du mathématicien.

Les mathématiciens ont d'ailleurs, en général, un sens aigu de la distinction qui existe entre (1) mettre au point des outils, (2) soulever un coin du voile qui recouvre la réalité mathématique primitive. Ainsi un outil nouveau n'acquiert vraiment droit à autre chose qu'à une bienveillante méfiance que quand il a été essentiel dans ce que les Anglo-Saxons appellent fort justement un *breakthrough*, un passage en force à travers le voile qui nous aveugle.

Il n'y a pas de recette générale pour réussir une telle avancée ; ce serait trop simple ! L'expérience montre que chaque mathématicien est un cas particulier. Tout au plus peut-on rappeler quelques règles élémentaires : par exemple, on ne doit jamais se précipiter pour lire une démonstration sans d'abord chercher à la trouver par soi-même. Des astuces aident à se concentrer plus facilement, comme de n'interrompre un travail de rédaction qu'au milieu d'une démonstration. On peut aussi donner l'exemple de John Conway (mathématicien de Princeton) qui a programmé son ordinateur pour que ce dernier lui pose chaque matin une question du style : «Quel jour de la semaine est le 21 janvier 1838?». Si J. Conway ne répond pas en moins de 30 secondes, l'ordinateur refuse de s'ouvrir.

Il n'est pas clair que les découvertes récentes sur le fonctionnement du cerveau nous soient plus utiles que les enseignements du petit livre de Jacques Hadamard (que je recommande) sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Vouloir réduire la réalité mathématique à des états physiques des neurones du cerveau, c'est un peu vouloir réduire la littérature à des réactions entre molécules d'encre et de papier, et le café reste jusqu'à nouvel ordre la meilleure drogue pour démontrer des théorèmes.

Alain CONNES est professeur à l'Institut des hautes études scientifiques, à Bures-sur-Yvette.
