

extérieur. Par exemple, 1999 est également un nombre premier, de sorte que 1997 et 1999 sont des nombres premiers jumeaux ; existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux ? On l'ignore. D'autre part, la réalité mathématique a la même «extraordinaire intelligibilité» que la réalité extérieure et, pour ne prendre qu'un exemple, la célèbre conjecture du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) sur les zéros de la fonction zêta (toujours non démontrée) signifie qu'avec une erreur de l'ordre de la racine carrée de n multipliée par le nombre de chiffres de n , le nombre de nombres premiers inférieurs à n est donné par une fonction nommée logarithme intégral $Li(n)$.

L'essence du travail mathématique est l'élaboration des concepts et des outils qui, éventuellement, rendent accessible la solution de quelques problèmes fondamentaux. En un sens, le mathématicien essaie de percevoir et de comprendre la réalité mathématique primitive, brute, non structurée *a priori*. Que cette réalité ne soit pas localisable dans l'espace-temps a peu d'importance ; elle n'en est pas moins accessible, ne serait-ce qu'expérimentalement, grâce à l'ordinateur. Les mathématiciens donnent ainsi un accès direct, d'emblée, par la pensée pure, à une entité sans limite. Un ami me racontait sa surprise lorsqu'un jour, pendant les grandes vacances, son fils âgé de cinq ans vint le trouver après avoir passé une heure sur la plage avec cet air soufureux caractéristique de la réflexion intense, et lui dit : «Papa, il n'y a pas de plus grand nombre...»

Je pense que l'acte créateur, en mathématiques, s'effectue par le langage, lors du découpage conceptuel de la réalité mathématique. Pour créer des mathématiques, on doit ainsi faire la distinction entre, d'une part, une réalité mathématique brute, initialement étiquetée de manière inductive avec une large part d'arbitraire, telle que les entiers dans le système décimal, et, d'autre part, le système formel, de nature axiomatique déductive, que le cerveau humain met au point pour percevoir et appréhender cette réalité mathématique brute.

Un fait empirique de l'arithmétique a bien peu de chances d'être compris s'il ne se formule pas de manière naturelle et esthétique dans le langage du système formel du mathématicien. Ainsi le problème de Fermat n'est devenu réellement accessible qu'à la fin des années 1980, grâce à la théorie des courbes elliptiques. Même quand une formulation conceptuelle a été trouvée, comme pour l'hypothèse de Riemann, le problème peut rester trop difficile, mais le mathématicien a au moins la possibilité de considérer un problème analogue, transplanté en quelque sorte dans une situation

voisine plus simple. La résolution du problème analogue éclaire bien souvent le cas initial et permet d'avancer vers sa solution.

En conclusion, examinons en quel sens les travaux de Kurt Gödel ont mis un point final à la tentation réductionniste des formalistes, et comment ils permettent de distinguer la réalité mathématique primitive du système de perception que le cerveau humain élabore pour comprendre et explorer cette réalité. Les formalistes pensent que les mathématiques sont uniquement des constructions hypothético-déductives, élaborées par l'homme, et dont le trait essentiel est d'être exemptes de contradictions. Ce point de vue a été systématisé par le mathématicien David Hilbert, qui voulait définir clairement et sans ambiguïté ce qu'est une démonstration mathématique. Hilbert a ainsi introduit la notion de système formel. Un tel système est donné par un alphabet fini, une grammaire qui spécifie ce qu'est un énoncé cohérent, un nombre fini de propositions supposées vraies, ou axiomes, et des règles d'inférence logique qui permettent de procéder à des déductions.

Les mathématiciens espéraient réduire les mathématiques à un tel langage formel. Si ce rêve avait abouti, le point de vue exprimé par les formalistes aurait été parfaitement justifié et il aurait été tentant de réduire les mathématiques à un langage. Les travaux de Gödel, aux environs de 1930, ont donné une réponse négative et définitive à ces espoirs de formalisation. On mentionne souvent l'«indécidabilité» démontrée par Gödel (on ne pourra jamais savoir si certains énoncés sont vrais ou faux), mais l'énoncé le plus fort et le plus troublant pour les formalistes est bien le suivant : «Pour tout système déductif formel S non contradictoire, il existe un énoncé vrai portant sur l'arithmétique des entiers naturels, et qui est indémontrable dans S ».

Il peut surprendre, au premier abord, qu'un énoncé arithmétique puisse être vrai sans être démontrable. En l'occurrence, il s'agit d'un énoncé universel, c'est-à-dire de la forme «Pour tout entier n , une certaine propriété $P(n)$ est satisfaite». Si l'on démontre un tel énoncé, sa véracité en découle, mais il peut très bien être vrai, au sens où, pour toute valeur de n , on a $P(n)$, sans pour autant que $P(n)$ soit démontrable!

Ainsi un système déductif formel, c'est-à-dire l'outil projectif que nous mettons au point grâce à notre cerveau pour percevoir la réalité mathématique, ne peut épuiser même les propriétés des entiers naturels. L'information contenue dans la réalité primitive, brute, des entiers naturels n'est pas de type fini, et elle échappera à toute tentative de réduction aux

déductions d'un langage formel. Ce résultat montre clairement la distinction entre cette réalité mathématique primitive et le système déductif que l'homme élabore pour l'analyser et la comprendre. Il est clair que ce système est une élaboration de notre cerveau, et qu'il a une évolution presque biologique, par sélection et intégration au «corpus culturel» des mathématiques engrangées dans les bibliothèques. Mais si on l'oppose à la réalité mathématique primitive qu'il a pour objet, on y gagne sur le plan conceptuel, en éliminant le côté négatif du théorème de Gödel, et même sur la compréhension de la pratique du mathématicien.

Les mathématiciens ont d'ailleurs, en général, un sens aigu de la distinction qui existe entre (1) mettre au point des outils, (2) soulever un coin du voile qui recouvre la réalité mathématique primitive. Ainsi un outil nouveau n'acquiert vraiment droit à autre chose qu'à une bienveillante méfiance que quand il a été essentiel dans ce que les Anglo-Saxons appellent fort justement un *breakthrough*, un passage en force à travers le voile qui nous aveugle.

Il n'y a pas de recette générale pour réussir une telle avancée ; ce serait trop simple ! L'expérience montre que chaque mathématicien est un cas particulier. Tout au plus peut-on rappeler quelques règles élémentaires : par exemple, on ne doit jamais se précipiter pour lire une démonstration sans d'abord chercher à la trouver par soi-même. Des astuces aident à se concentrer plus facilement, comme de n'interrompre un travail de rédaction qu'au milieu d'une démonstration. On peut aussi donner l'exemple de John Conway (mathématicien de Princeton) qui a programmé son ordinateur pour que ce dernier lui pose chaque matin une question du style : «Quel jour de la semaine est le 21 janvier 1838?». Si J. Conway ne répond pas en moins de 30 secondes, l'ordinateur refuse de s'ouvrir.

Il n'est pas clair que les découvertes récentes sur le fonctionnement du cerveau nous soient plus utiles que les enseignements du petit livre de Jacques Hadamard (que je recommande) sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique. Vouloir réduire la réalité mathématique à des états physiques des neurones du cerveau, c'est un peu vouloir réduire la littérature à des réactions entre molécules d'encre et de papier, et le café reste jusqu'à nouvel ordre la meilleure drogue pour démontrer des théorèmes.

Alain CONNES est professeur à l'Institut des hautes études scientifiques, à Bures-sur-Yvette.



L'intelligence en biologie

JEAN-DIDIER VINCENT

Prétendre, comme je le fais, que l'intelligence est inséparable de l'affect, de la passion, c'est aussi se donner un guide pratique pour l'exercice de la biologie : pour interpréter, comprendre, penser le vivant, vivons et conservons l'idée que le vivant, comme nous, a une histoire.

J'ai la conviction qu'une intelligence purement formelle explorerait mal le vivant, parce que le sens du vivant échappe à une syntaxe intemporelle ; il n'émerge que de l'histoire individuelle des organismes ou de l'histoire évolutive des espèces. Pour révéler les mécanismes du vivant, le biologiste doit sans cesse passer les données au crible de cette double histoire. La nécessité d'interpréter l'histoire individuelle des organismes suffit à justifier la passion que je réclame : les êtres vivants ne se constituent-ils pas par les passions, au sens de la jouissance, du plaisir ou de la souffrance ? Leur histoire n'est-elle pas ainsi toute passion ? Même des phénomènes qui semblent aussi mécaniques que le conditionnement mettent les passions en œuvre : le chien qui salive à l'écoute d'une cloche « sait » qu'il recevra de la nourriture, objet de plaisir. De ce fait, le biologiste qui analyse le vivant gagne à se fonder sur sa propre humanité, à se ramener donc à ses propres passions pour comprendre et interpréter les observations et les expériences qu'il fait.

En ce sens, l'intelligence du biologiste est aussi celle de l'intelligence de sa propre vie, contrairement à celle du mathématicien, du physicien ou du chimiste, qui étudient des objets inafectés. Le biologiste, lui, a une réflexion incarnée, même quand il étudie des bactéries, car derrière la bactérie, il y a toute la vie de la bactérie : son développement, sa croissance, ses mouvements, les fermentations, les maladies qu'elle subit ou qu'elle fait subir, la mort. Certes une particule subatomique a une stabilité limitée, mais elle n'a pas d'histoire : un électron a des caractéristiques immuables tant qu'il est stable.

La vie est une fable. Le vivant est une histoire, qui s'incarne, et l'intelligence du biologiste est à son mieux

quand le biologiste a une relation avec la souffrance ou avec la vie de l'individu. Un médecin qui devient biologiste a des atouts. D'ailleurs, le mot « biologie », né au début du XIX^e siècle, est venu remplacer celui de « physiologie », laquelle traite du rapport de l'être vivant avec la nature. La physiologie et la médecine sont synonymes.

En pratique, comment le biologiste peut-il se colleter efficacement avec la complexité du réel ? Poser cette question montre bien que la biologie est une science à part : en chimie ou en physique, on peut isoler les systèmes, les simplifier, les réduire. En biologie, on n'a pas souvent ce recours : on ne connaît pas de modèle simplifié de micro-organisme, par exemple. Les résultats d'expériences sont notoirement difficiles à interpréter.

En neurobiologie, par exemple, celui qui étudie la mémoire d'animaux dont il lèse le cerveau ne perturbe pas le système qu'il étudie comme le fait le physicien qui change un seul paramètre. Aussi, lors de l'interprétation des résultats, le biologiste doit-il faire un bilan entre ce qui a été supprimé et ce qui a été gagné lors de la suppression. Il ne peut jamais se contenter de simples soustractions ou additions d'effets ; le système étudié est comme une toile d'araignée qui s'agit de toute part quand on la touche en un point.

Pour s'en tirer, on ne peut, j'y reviens, faire abstraction du sens des phénomènes. Je dis bien sens, et non finalité. Sans la passion qui éclaire le sens, la biologie moléculaire risque de devenir une chimie physique qui ne comprend pas les observations qu'elle fait. Pour interpréter des phénomènes biologiques, le biologiste doit reconnaître que l'organisme est le produit d'une interaction avec son milieu ; il doit savoir que le milieu exerce des contraintes sur l'homme comme sur l'animal, sur la plante ou sur le micro-organisme. Si le milieu exerce, par exemple, des contraintes périodiques, l'organisme se sera adapté à cette périodicité ; un biologiste qui étudierait ainsi une libération d'hormones, telle que la prolactine, ne pourra conduire ses expériences et tirer des conclusions perti-

nentes que s'il tient compte du phénomène de la périodicité de la contrainte exercée par le milieu.

De même, un médecin qui veut déclencher une ovulation chez une femme stérile en lui administrant l'hormone GnRH (la gonastimuline, libérée par l'hypothalamus, qui stimule l'hypophyse) doit avoir l'intelligence du vivant pour être efficace : d'une part, le terrain doit être préparé (l'ovulation ne peut se faire à n'importe quel moment), et, d'autre part, l'injection doit être accordée sur le rythme de l'organisme, qui est, d'ailleurs, aussi celui du milieu, en raison de la longue adaptation des organismes à leur milieu. L'injection d'une dose massive n'a aucun effet. Le temps fait l'action, et l'on doit avoir l'idée que le cerveau est comme une horloge. Tout le vivant est le produit de l'évolution ; il n'existe pas d'organisme qui ne soit le produit d'une histoire. Au total, le biologiste aura l'intelligence de son objet s'il rapporte les phénomènes à l'aune de la sélection naturelle, s'il donne aux modèles un cadre spatial et temporel.

Comment s'exercer à la biologie ? Comment devenir ce fouineur à l'intelligence globale ? Comment apprendre à intégrer, tel Sherlock Holmes, les indices de l'enquête ? Comment devenir capable d'intégrer ? Les observations précédentes montrent que le biologiste doit apprendre à réunir les fils : le fil chimique tout comme le fil psychologique. Toutefois il doit également vivre, et vivre passionnément, puisque l'analyse des passions sera la clef du monde vivant.

Jeunes biologistes, vivez fort, expérimentez, discutez de vos résultats, faites vivre les expériences, soyez rigoureux lors de leur conduite, mais, ensuite, revivez-les dans le schéma, l'interprétation, le projet... Méfiez-vous de l'enfermement dans le quotidien expérimental. La virtuosité technique est un risque : le biologiste, s'il s'intéresse à l'instrumentation pour elle-même, perd la possibilité de se passionner pour l'objet qui doit être celui de son étude : le vivant.

Jean-Didier VINCENT est professeur à l'Institut universitaire de France et directeur de l'Institut Alfred Fessard (CNRS).