



Dusan Petric

Champernowne, et quelques autres

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les décimales infinies des irrationnels recèlent des mystères qui résistent à toutes les attaques.

Les nombres réels qui ne sont pas des fractions de nombres entiers (et que l'on appelle les irrationnels, par exemple $\sqrt{2}$) s'écrivent sans répétition périodique de leurs décimales, et c'est leur caractérisation la plus simple. Par exemple, $2/13$ est rationnel, et donc périodique, $2/13 = 0,153846153846...$ En revanche, $\sqrt{2}$, irrationnel, n'est donc pas périodique, ce que l'on constate en observant ses décimales 1,41421356..., aussi loin que l'on aille. Les Grecs ont démontré que $\sqrt{2}$ ne peut être exprimé sous forme de fraction.

Cela ne signifie pas que les décimales d'un nombre irrationnel sont toujours irrégulières, car il existe bien des régularités autres que la périodicité. Le nombre de Champernowne, inventé par le mathématicien anglais D. Champernowne en 1933, engendré par une règle simple (la suite des entiers en base 10), est très régulier et prévisible, mais la suite de ses décimales n'est pas périodique : 0,1234567891011121314151617181920...

Le nombre de Champernowne est irrationnel (ce n'est pas le rapport exact de deux nombres entiers). Ce nombre est même transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers, comme l'est $\sqrt{2}$, qui, par définition, vérifie : $x^2 - 2 = 0$.

Cette transcendance du nombre de Champernowne a été démontrée sur un lit d'hôpital, en 1937, par le mathématicien allemand Kurt Mahler : à la suite d'une opération, il avait reçu des injections de morphine et voulait se prouver que son cerveau était intact.

Les nombres qui sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers sont dénommés nombres algébriques : certains s'écrivent avec des radicaux, comme $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{7}}$: on les appelle nombres algébriques exprimables par radicaux. En revanche, certains nombres algébriques ne sont pas exprimables par radicaux : on sait, par exemple, que les solutions de l'équation $2x^5 - 5x^4 + 5 = 0$

ne le sont pas. Toutes les solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers de degré inférieur ou égal à 4 sont exprimables par radicaux, alors que, dès qu'une équation polynomiale a un degré supérieur à 4, ses solutions ne sont, le plus souvent, pas exprimables par radicaux.

La classification habituelle des nombres réels, étudiée soigneusement au XIX^e siècle, en allant des plus simples aux plus compliqués, se présente comme suit : nombres entiers/nombres rationnels/nombres algébriques exprimables par radicaux/nombres algébriques non exprimables par radicaux/nombres transcendants.

Cette classification ne prend en compte que la nature «équationnelle» des nombres : sont-ils solutions d'équations simples ? Dans le cas des entiers et des rationnels, connaître la nature équationnelle fournit une indication sur la nature des décimales : les entiers n'ont pas de décimales après la virgule, les rationnels ont des décimales qui se répè-

tent périodiquement. Cette correspondance entre propriétés équationnelles et propriétés des décimales se prolonge-t-elle plus loin, et, si c'est le cas, de quelle façon ? Ces questions sont étonnamment difficiles.

Le bizarre nombre de Champernowne est le premier indice de cette difficulté : il est le plus compliqué possible dans la classification équationnelle des nombres (puisque'il est transcendant), tout en ayant un développement décimal simple et facile à écrire jusqu'à l'infini. Il suggère que, s'il y a une classification naturelle des nombres en fonction de la régularité de leur développement (décimal ou autre), alors ses liens avec la classification équationnelle ne se réduiront pas à une mise en parallèle directe.

Nous découvrirons une classification fondée sur les développements des nombres et nous verrons qu'elle conduit à une multitude de questions naturelles qui défient toujours les mathématiciens.

NOMBRES ÉQUIRÉPARTIS

Les nombres équirépartis sont, par définition, ceux dont les chiffres vérifient l'égalisation des proportions. La fréquence des «0» dans leurs n premiers chiffres tend vers 0,1 lorsque n tend vers l'infini, ainsi que la fréquence des «1», des «2», etc.

Connaît-on explicitement des nombres équirépartis ? Oui, en voilà deux :

$R_1 = 0,12345678901234567890...$
(la suite 1234567890 répétée sans cesse).
 $R_2 = 0,112233445566778899001122...$
(la suite 11223344556677889900 répétée sans cesse).

Ces deux nombres, puisqu'ils ont des décimales périodiques, sont rationnels. Ce sont les fractions :

$R_1 = 137174210 / 1111111111...$ et $R_2 = 113367116734120100/101010101010101010$.

Il est à la fois presque évident et démontrable que, si l'on tire des chiffres au hasard avec un dé équitale à dix faces (chaque face a une chance sur dix d'être tirée à



1. Paul Erdős, en 1996, explique au mathématicien Albert Nijenhuis, qui se prépare à payer, pourquoi il a perdu son pari mathématique.