



Dusan Petric

Champernowne, et quelques autres

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les décimales infinies des irrationnels recèlent des mystères qui résistent à toutes les attaques.

Les nombres réels qui ne sont pas des fractions de nombres entiers (et que l'on appelle les irrationnels, par exemple $\sqrt{2}$) s'écrivent sans répétition périodique de leurs décimales, et c'est leur caractérisation la plus simple. Par exemple, $2/13$ est rationnel, et donc périodique, $2/13 = 0,153846153846...$ En revanche, $\sqrt{2}$, irrationnel, n'est donc pas périodique, ce que l'on constate en observant ses décimales 1,41421356..., aussi loin que l'on aille. Les Grecs ont démontré que $\sqrt{2}$ ne peut être exprimé sous forme de fraction.

Cela ne signifie pas que les décimales d'un nombre irrationnel sont toujours irrégulières, car il existe bien des régularités autres que la périodicité. Le nombre de Champernowne, inventé par le mathématicien anglais D. Champernowne en 1933, engendré par une règle simple (la suite des entiers en base 10), est très régulier et prévisible, mais la suite de ses décimales n'est pas périodique : 0,1234567891011121314151617181920...

Le nombre de Champernowne est irrationnel (ce n'est pas le rapport exact de deux nombres entiers). Ce nombre est même transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers, comme l'est $\sqrt{2}$, qui, par définition, vérifie : $x^2 - 2 = 0$.

Cette transcendance du nombre de Champernowne a été démontrée sur un lit d'hôpital, en 1937, par le mathématicien allemand Kurt Mahler : à la suite d'une opération, il avait reçu des injections de morphine et voulait se prouver que son cerveau était intact.

Les nombres qui sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers sont dénommés nombres algébriques : certains s'écrivent avec des radicaux, comme $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{7}}$: on les appelle nombres algébriques exprimables par radicaux. En revanche, certains nombres algébriques ne sont pas exprimables par radicaux : on sait, par exemple, que les solutions de l'équation $2x^5 - 5x^4 + 5 = 0$

ne le sont pas. Toutes les solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers de degré inférieur ou égal à 4 sont exprimables par radicaux, alors que, dès qu'une équation polynomiale a un degré supérieur à 4, ses solutions ne sont, le plus souvent, pas exprimables par radicaux.

La classification habituelle des nombres réels, étudiée soigneusement au XIX^e siècle, en allant des plus simples aux plus compliqués, se présente comme suit : nombres entiers/nombres rationnels/nombres algébriques exprimables par radicaux/nombres algébriques non exprimables par radicaux/nombres transcendants.

Cette classification ne prend en compte que la nature «équationnelle» des nombres : sont-ils solutions d'équations simples ? Dans le cas des entiers et des rationnels, connaître la nature équationnelle fournit une indication sur la nature des décimales : les entiers n'ont pas de décimales après la virgule, les rationnels ont des décimales qui se répè-

tent périodiquement. Cette correspondance entre propriétés équationnelles et propriétés des décimales se prolonge-t-elle plus loin, et, si c'est le cas, de quelle façon ? Ces questions sont étonnamment difficiles.

Le bizarre nombre de Champernowne est le premier indice de cette difficulté : il est le plus compliqué possible dans la classification équationnelle des nombres (puisque'il est transcendant), tout en ayant un développement décimal simple et facile à écrire jusqu'à l'infini. Il suggère que, s'il y a une classification naturelle des nombres en fonction de la régularité de leur développement (décimal ou autre), alors ses liens avec la classification équationnelle ne se réduiront pas à une mise en parallèle directe.

Nous découvrirons une classification fondée sur les développements des nombres et nous verrons qu'elle conduit à une multitude de questions naturelles qui défient toujours les mathématiciens.

NOMBRES ÉQUIRÉPARTIS

Les nombres équirépartis sont, par définition, ceux dont les chiffres vérifient l'égalisation des proportions. La fréquence des «0» dans leurs n premiers chiffres tend vers 0,1 lorsque n tend vers l'infini, ainsi que la fréquence des «1», des «2», etc.

Connaît-on explicitement des nombres équirépartis ? Oui, en voilà deux :

$R_1 = 0,12345678901234567890...$
(la suite 1234567890 répétée sans cesse).
 $R_2 = 0,112233445566778899001122...$
(la suite 11223344556677889900 répétée sans cesse).

Ces deux nombres, puisqu'ils ont des décimales périodiques, sont rationnels. Ce sont les fractions :

$R_1 = 137174210 / 1111111111...$ et $R_2 = 113367116734120100/101010101010101010$. Il est à la fois presque évident et démontrable que, si l'on tire des chiffres au hasard avec un dé équitabie à dix faces (chaque face a une chance sur dix d'être tirée à



1. Paul Erdős, en 1996, explique au mathématicien Albert Nijenhuis, qui se prépare à payer, pourquoi il a perdu son pari mathématique.

chaque lancer) et que l'on construit avec les résultats un nombre réel, alors celui-ci est équiréparti. Le désordre total entraîne l'équirépartition.

Or les nombres R_1 et R_2 , ainsi qu'une multitude d'autres construits sur le même principe, prouvent qu'un nombre équiréparti n'est pas toujours désordonné. Les nombres équirépartis peuvent donc être réguliers (comme R_1 ou R_2) ou irréguliers, comme ceux résultant d'un tirage équitable infini de leurs chiffres. De même, les nombres équirépartis peuvent être rationnels (R_1 et R_2) ou irrationnels (comme le nombre de Champernowne qui est transcendant, donc irrationnel). La propriété d'équirépartition des décimales d'un nombre n'indique rien sur sa place dans la classification équationnelle.

Lorsqu'on examine les décimales du nombre de Champernowne, il semble choquant qu'elles soient équiréparties, car dans le début du développement la proportion des «1» est très supérieure à celle des «0» : il y a par exemple huit «1» parmi les 20 premiers chiffres de Champernowne. Pourtant, à l'aide du raisonnement, les mathématiciens ont démontré que cet avantage apparent des «1» s'estompe ensuite. Les fréquences des chiffres de Champernowne s'égalisent à l'infini.

DES CONSTANTES REMARQUABLES

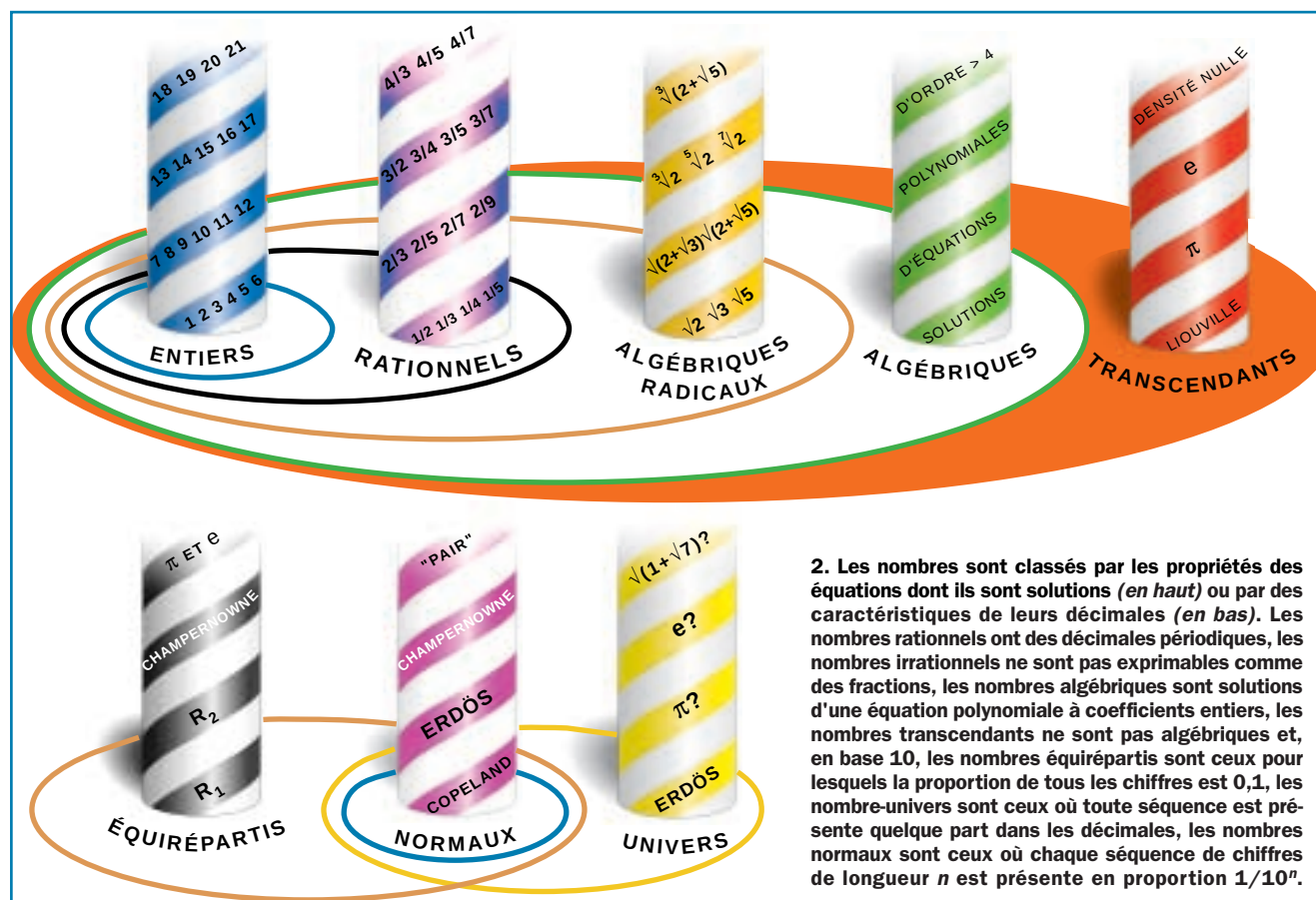
Il existe quelques variantes du nombre de Champernowne qui méritent qu'on y réfléchisse. Par exemple, le nombre Pair = 0,2468101214161820222426... constitué par la suite des nombres pairs.

Contrairement aux apparences, ce nombre est aussi équiréparti. L'égalisation des proportions est plus choquante encore que dans le cas de Champernowne, car un nombre pair se termine nécessairement par un chiffre pair : 0, 2, 4, 6 ou 8, et en conséquence les chiffres pairs sont favorisés. Cependant, quand on va loin dans la suite, et que les nombres pairs ajoutés les uns après les autres deviennent très longs, cet avantage s'amoit (le dernier chiffre de chaque nombre pair finissant par être noyé parmi les autres), pour disparaître à l'infini.

Voici un nombre nettement plus complexe, car fondé sur la suite très irrégulière et très mystérieuse des nombres premiers : Erdős = 0,235711131719... constitué par la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17... Ce nombre doit son nom au mathématicien Paul Erdős, qui a montré, dans un article écrit avec le mathématicien Arthur Copeland, que ce nombre était équiréparti. Le frère de ce nombre est le nombre de Copeland :

0,46891012141516182021222425..., constitué des nombres composés – non premiers – les uns à la suite des autres. Là encore, grâce au travail d'Erdős et de Copeland, on sait que ce nombre est équiréparti.

Paul Erdős est un des mathématiciens les plus célèbres et étonnants de notre siècle. Il est né en Hongrie en 1913 et mort en 1996. Il a fait preuve d'une productivité extraordinaire, s'intéressant à une multitude de sujets qu'il a enrichis de quelques merveilles. Il a publié avec des mathématiciens de toutes nationalités, qu'il rencontrait lors du périple mondial permanent qu'a été sa vie. Il ne possédait pas d'adresse (c'était au sens propre un SDF!) et trouvait pénible de rester plus de 15 jours dans la même ville. On disait de Paul Erdős que, pour le rencontrer, il suffisait de rester là où l'on était et d'attendre qu'il passe. Il a cosigné, avec 458 chercheurs, 1 500 publications ce qui, dans le domaine des mathématiques pures, est un record absolu. Son premier résultat, qu'il établit à l'âge de 16 ans, fut la preuve, par une méthode directe, qu'entre les nombres n et $2n$ il y a toujours au moins un nombre premier. Infatigable jusqu'à ses derniers jours, il nous a légué des résultats astucieux et profonds qui fascineront longtemps encore la communauté des mathématiciens.



2. Les nombres sont classés par les propriétés des équations dont ils sont solutions (en haut) ou par les caractéristiques de leurs décimales (en bas). Les nombres rationnels ont des décimales périodiques, les nombres irrationnels ne sont pas exprimables comme des fractions, les nombres algébriques sont solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers, les nombres transcendants ne sont pas algébriques et, en base 10, les nombres équirépartis sont ceux pour lesquels la proportion de tous les chiffres est 0,1, les nombres normaux sont ceux où toute séquence est présente quelque part dans les décimales, les nombres normaux sont ceux où chaque séquence de chiffres de longueur n est présente en proportion $1/10^n$.