

LES 1 000 PREMIÈRES DÉCIMALES DE QUELQUES NOMBRES

À chaque fois, on a compté le nombre de "0", de "1", . . . de "9" dans les 1 000 premières décimales. Les écarts avec ce qu'on attend d'un nombre équiréparti ne sont pas significatifs. En menant les calculs plus loin, l'égalisation entre l'utilisation de chaque chiffre devient encore plus nette. Toutes ces constantes numériques sont donc vraisemblablement des nombres équirépartis. Toutefois, on ne sait le prouver pour aucune.

π	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	116	103	103	93	97	94	95	101	105

e								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
96	98	109	99	85	99	99	103	112

$\sqrt{2}$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
99	108	82	100	104	90	104	113	92

$\sqrt{3}$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
97	100	97	84	93	103	98	125	108

$\sqrt[3]{2}$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
95	106	78	94	100	104	101	93	111

Les 78 "3" de $\sqrt[3]{2}$ semblent un peu faibles, mais, en calculant 2 000 décimales de racine cubique de 2, on trouve :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
197	204	179	188	224	210	194	190	187

Dans le deuxième millier de décimales, il y a eu 101 fois le "3". Rien d'anormal donc!

Le nombre suivant qui retiendra notre attention est plus ancien que les précédents : c'est le nombre de *Liouville*, égal à :

0,110001000000000000000000000000000000...
 (des «1» en position $n!$, c'est-à-dire en
 position 1, 2, 6, 24, 120, ...)

Ce nombre est intéressant, car c'est un nombre régulier, simple, non équiréparti : à l'infini, la proportion des «0» devient 100 pour cent. Pourtant, le nombre de *Liouville* est transcendant, c'est même le premier nombre dont un mathématicien (Joseph Liouville, en 1844) ait réussi à prouver la transcendance, avant qu'on établisse celle de $e = 2,718281...$ et celle de $\pi = 3,1415926...$

Le nombre de *Liouville* montre qu'on peut être transcendant sans être équiréparti, ce qui n'était pas évident *a priori* : ainsi on ignore si π et e sont équirépartis ou pas (on pense qu'ils le sont sans avoir su faire autre chose que de le constater sur les quelques milliards de décimales qui ont été calculées). Le jour où on le démontrera, on aura prouvé que Dieu, qui a créé π , joue aux dés...

Au total, un nombre transcendant peut être équiréparti ou non ; un nombre équiréparti peut être transcendant ou non ; un nombre rationnel peut être équiréparti

ou non, et un nombre équiréparti peut être rationnel ou non. Remarquons que, si l'on sait que *Champernowne*, *Liouville*, *Pair* sont transcendants, pour *Erdős* et *Copeland*, on le soupçonne sans avoir su le démontrer. De plus, les quatre nombres *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* ont une autre propriété fascinante : ce sont des nombres-univers.

LES NOMBRES-UNIVERS

Les nombres-univers sont, par définition, les nombres qui contiennent toutes les suites possibles de chiffres : quelque part vous trouverez 421, quelque part vous trouverez 1998, mais aussi 314159 ou 1111111111. Ces nombres sont omniscients et universels : ainsi, pour frapper l'imagination, la photo de la pyramide de Louxor enregistrée sous format numérique (comme le fait un appareil de photo numérique) est une suite finie de chiffres et donc, par définition, elle est dans tout nombre-univers, de même bien sûr que le roman (mis sous format numérique) que vous rêvez d'écrire quand vous serez à la retraite. Tout l'univers réel ou imaginaire se trouve dans un nombre-univers, qui est bien entendu irrationnel, car le développement d'un nombre péri-

dique ne contient pas toutes les suites possibles de chiffres.

Que le nombre de *Champernowne* soit un nombre-univers est assez facile à voir, puisqu'il est composé de la suite de tous les nombres entiers : 421 apparaît inévitablement dans ses décimales (quand on écrit l'entier 421), de même que pour 1998 (quand on écrit 1998) ou 02 469 (quand on écrit 102 468), etc. Pour *Pair*, *Erdős*, *Copeland*, des raisonnements du même type montrent qu'il s'agit aussi de nombres-univers. Les nombres π et e ne peuvent être ajoutés avec certitude à cette liste, car aujourd'hui, même si l'on soupçonne qu'ils sont bien des nombres-univers, personne n'a su l'établir rigoureusement.

Les quatre nombres cités ici dont on a prouvé qu'ils étaient univers (*Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland*) le sont de manière robuste dans le sens suivant : si vous en prenez un et que vous changez un nombre fini (aussi grand soit-il) de ses décimales, vous obtenez un nouveau nombre-univers. En effet, si la séquence 421 est concernée par le changement fini, cela ne peut pas être le cas de toutes les séquences 4 210, 42 100, 421 000, etc., qui sont présentes ailleurs, et donc 421 (ou toute autre séquence) reste dans le nombre modifié.

Existe-t-il un rapport simple entre la propriété d'équirépartition et celle d'universalité? Non, certains nombres équirépartis sont des nombres-univers (*Champernowne*), d'autres non (R_1 ou R_2), et certains nombres-univers sont équirépartis (*Champernowne*) et d'autres non (le nombre *Densité-nulle* défini plus loin).

Existe-t-il un rapport simple entre la propriété d'être transcendant et la propriété d'être un nombre-univers? La réponse à cette question est incomplète. On sait que certains nombres transcendants sont univers (*Champernowne*), d'autres non (*Liouville*). En revanche, on ignore s'il existe des nombres-univers non transcendants (nous reviendrons plus loin sur ce trou dans nos connaissances).

LA ROBUSTESSE

Les nombres *Champernowne*, *Pair*, *Erdős* et *Copeland* possèdent une «robustesse» plus grande encore que celle mentionnée plus haut. Non seulement, ils restent univers quand on change un nombre fini de leurs chiffres, mais ils résistent aussi «aux changements infinis se rarefiant» : si vous modifiez les décimales de l'un d'eux en toutes les positions qui sont des nombres carrés 1, 4, 9,..., n^2 , etc., il reste un nombre-univers. À la place des positions carrées, vous pouvez changer leurs décimales en toutes les positions correspondant à un ensemble infini A se