

LES 1 000 PREMIÈRES DÉCIMALES DE QUELQUES NOMBRES

À chaque fois, on a compté le nombre de "0", de "1", . . . de "9" dans les 1 000 premières décimales. Les écarts avec ce qu'on attend d'un nombre équiréparti ne sont pas significatifs. En menant les calculs plus loin, l'égalisation entre l'utilisation de chaque chiffre devient encore plus nette. Toutes ces constantes numériques sont donc vraisemblablement des nombres équirépartis. Toutefois, on ne sait le prouver pour aucune.

π

1	2	3	4	5	6	7	8	9
116	103	103	93	97	94	95	101	105

e

1	2	3	4	5	6	7	8	9
96	98	109	99	85	99	99	103	112

 $\sqrt{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
99	108	82	100	104	90	104	113	92

 $\sqrt{3}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
97	100	97	84	93	103	98	125	108

31

$\sqrt[3]{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	95	106	78	94	100	104	101	93	111

Les 78 "3" de $\sqrt[3]{2}$ semblent un peu faibles, mais, en calculant 2 000 décimales de racine cubique de 2, on trouve :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
197	204	179	188	224	210	194	190	187

Dans le deuxième millier de décimales, il y a eu 101 fois le "3". Rien d'anormal donc!

Le nombre suivant qui retiendra notre attention est plus ancien que les précédents : c'est le nombre de *Liouville*, égal à :

(des «1» en position $n!$, c'est-à-dire en position 1, 2, 6, 24, 120, ...)

Ce nombre est intéressant, car c'est un nombre régulier, simple, non équiréparti : à l'infini, la proportion des «0» devient 100 pour cent. Pourtant, le nombre de *Liouville* est transcendant, c'est même le premier nombre dont un mathématicien (Joseph Liouville, en 1844) ait réussi à prouver la transcendance, avant qu'on établisse celle de $e = 2,718281...$ et celle de $\pi = 3,1415926...$

Le nombre de *Liouville* montre qu'on peut être transcendant sans être équiréparti, ce qui n'était pas évident *a priori* : ainsi on ignore si π et e sont équirépartis ou pas (on pense qu'ils le sont sans avoir su faire autre chose que de le constater sur les quelques milliards de décimales qui ont été calculées). Le jour où on le démontrera, on aura prouvé que Dieu, qui a créé π , joue aux dés...

Au total, un nombre transcendant peut être équiréparti ou non ; un nombre équiréparti peut être transcendant ou non ; un nombre rationnel peut être équiréparti

ou non, et un nombre équiréparti peut être rationnel ou non. Remarquons que, si l'on sait que *Champernowne*, *Liouville*, *Pair* sont transcendants, pour *Erdős* et *Copeland*, on le soupçonne sans avoir su le démontrer. De plus, les quatre nombres *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* ont une autre propriété fascinante : ce sont des nombres-univers.

LES NOMBRES-UNIVERS

Les nombres-univers sont, par définition, les nombres qui contiennent toutes les suites possibles de chiffres : quelque part vous trouverez 421, quelque part vous trouverez 1998, mais aussi 314159 ou 1111111111. Ces nombres sont omniscients et universels : ainsi, pour frapper l'imagination, la photo de la pyramide de Louxor enregistrée sous format numérique (comme le fait un appareil de photo numérique) est une suite finie de chiffres et donc, par définition, elle est dans tout nombre-univers, de même bien sûr que le roman (mis sous format numérique) que vous rêvez d'écrire quand vous serez à la retraite. Tout l'univers réel ou imaginaire se trouve dans un nombre-univers, qui est bien entendu irrationnel, car le développement d'un nombre péri-

dique ne contient pas toutes les suites possibles de chiffres.

Que le nombre de *Champernowne* soit un nombre-univers est assez facile à voir, puisqu'il est composé de la suite de tous les nombres entiers : 421 apparaît inévitablement dans ses décimales (quand on écrit l'entier 421), de même que pour 1998 (quand on écrit 1998) ou 02 469 (quand on écrit 102 468), etc. Pour *Pair*, *Erdős*, *Copeland*, des raisonnements du même type montrent qu'il s'agit aussi de nombres-univers. Les nombres π et e ne peuvent être ajoutés avec certitude à cette liste, car aujourd'hui, même si l'on soupçonne qu'ils sont bien des nombres-univers, personne n'a su l'établir rigoureusement.

Les quatre nombres cités ici dont on a prouvé qu'ils étaient univers (*Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland*) le sont de manière robuste dans le sens suivant : si vous en prenez un et que vous changez un nombre fini (aussi grand soit-il) de ses décimales, vous obtenez un nouveau nombre-univers. En effet, si la séquence 421 est concernée par le changement fini, cela ne peut pas être le cas de toutes les séquences 4 210, 42 100, 421 000, etc., qui sont présentes ailleurs, et donc 421 (ou toute autre séquence) reste dans le nombre modifié.

Existe-t-il un rapport simple entre la propriété d'équirépartition et celle d'universalité? Non, certains nombres équirépartis sont des nombres-univers (*Champernowne*), d'autres non (R_1 ou R_2), et certains nombres-univers sont équirépartis (*Champernowne*) et d'autres non (le nombre *Densité-nulle* défini plus loin).

Existe-t-il un rapport simple entre la propriété d'être transcendant et la propriété d'être un nombre-univers ? La réponse à cette question est incomplète. On sait que certains nombres transcendants sont univers (*Champernowne*), d'autres non (*Liouville*). En revanche, on ignore s'il existe des nombres-univers non transcendants (nous reviendrons plus loin sur ce trou dans nos connaissances).

LA ROBUSTESSE

Les nombres *Champernowne*, *Pair*, *Erdős* et *Copeland* possèdent une «robustesse» plus grande encore que celle mentionnée plus haut. Non seulement, ils restent univers quand on change un nombre fini de leurs chiffres, mais ils résistent aussi «aux changements infinis se raréfiant» : si vous modifiez les décimales de l'un d'eux en toutes les positions qui sont des nombres carrés 1, 4, 9, ..., n^2 , etc., il reste un nombre-univers. À la place des positions carrées, vous pouvez changer leurs décimales en toutes les positions correspondant à un ensemble infini A se

«raréfiant à l'infini», c'est-à-dire tel que le nombre d'éléments de A inférieur à n divisé par n , tend vers 0 à l'infini (l'ensemble des nombres premiers ou celui des puissances de 2 sont des exemples de tels ensembles se raréfiant à l'infini).

Le nombre suivant, *Densité-nulle*, égal à 0,1020030000004..., est un mélange entre *Champernowne* et *Liouville* : il nous permettra de répondre à quelques questions simples. Il est constitué des entiers en écriture décimale les uns derrière les autres, séparés de 1! fois «0», puis 2! fois «0», etc.

Ce nombre est un nombre-univers transcendant, mais n'est pas équiréparti, car la densité des «0» tend vers l'unité, alors que la densité des autres chiffres tend vers 0. Par ailleurs, ce nombre-univers n'est pas robuste «aux changements infinis se raréfiant», car, en transformant les chiffres autres que «0» en «0», vous n'effectuez des modifications qu'en des positions se raréfiant à l'infini et obtenez cependant un nombre constitué uniquement de «0», qui n'est plus un nombre-univers. Cela prouve que tous les nombres-univers ne sont pas aussi robustes que les quatre cités ci-dessus. Remarquons aussi que *Densité-nulle* montre qu'on peut tout contenir et malgré cela n'être composé pratiquement que de «0» : même dans un nombre submergé de «0», il y a encore la place pour tout l'univers !

La grande robustesse aux changements des quatre nombres-univers *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* provient d'une propriété en apparence extraordinaire, la normalité, qui est une sorte de synthèse de l'équirépartition et de l'universalité.

LES NOMBRES NORMAUX

Un nombre est normal en base 10 si son développement décimal possède la propriété suivante :

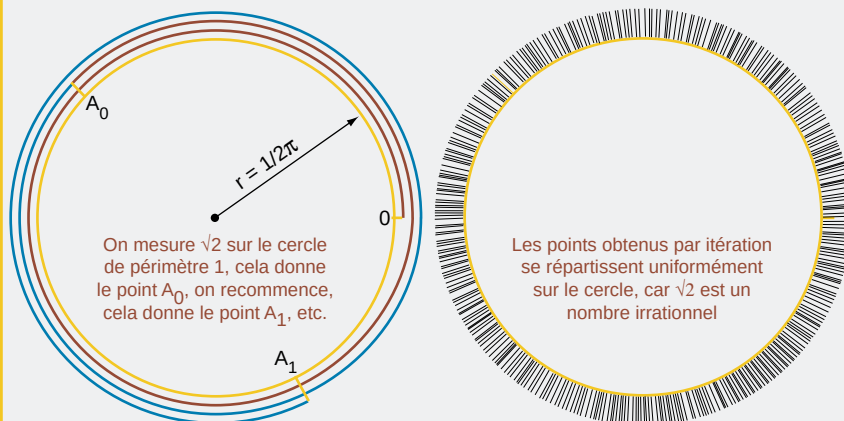
- les 10 chiffres apparaissent en proportions équilibrées (10 pour cent de chaque) ;
- les 100 paires possibles de chiffres consécutifs (00, 01, 02, ..., 99) apparaissent aussi en proportions équilibrées (chacune apparaît avec une fréquence de 1 pour cent) ;
- les 1 000 triplets de chiffres consécutifs (000, 001, ..., 999) apparaissent en proportions équilibrées (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Non seulement dans un nombre normal vous trouvez tout (donc un nombre normal est un nombre-univers), mais tout y sera parfaitement équilibré (un nombre normal est donc un nombre équiréparti). La séquence 37 apparaîtra en moyenne autant de fois que la séquence 72, c'est-à-dire une fois sur 100 ; la séquence

TOUT NOMBRE IRRATIONNEL EST PRESQUE UN NOMBRE-UNIVERS

Le mathématicien Hermann Weyl a fourni en 1916 une caractérisation remarquable des nombres irrationnels qui n'est pas sans rapport avec la notion de nombre-univers.

On trace un cercle de périmètre unité, et donc de rayon $1/2\pi$. On fixe une origine sur ce cercle. On se déplace à partir de l'origine sur le périmètre et, à chaque fois qu'on a parcouru une longueur de x , on marque un point sur le cercle. D'après le résultat de H. Weyl, si x est irrationnel, les marques que l'on fait sont en nombre infini et se répartissent uniformément sur le cercle (comme s'il s'agissait de points choisis au hasard). Si x est rationnel, les marques sont en nombre fini (on s'arrête toujours aux mêmes endroits).



Une conséquence de ce résultat est que si x est irrationnel et si s est une séquence donnée de chiffres (par exemple 43254), alors il existe un multiple de x qui possède cette séquence dans sa représentation décimale. En quelque sorte, pris globalement, les multiples d'un irrationnel ont la propriété qui définit un nombre-univers.

1998 apparaîtra avec une fréquence de 1/10000, comme la séquence 8 642, etc.

Les contraintes qu'on impose à ces nombres sont si nombreuses qu'on peut se demander si elles sont compatibles, c'est-à-dire s'il existe un nombre dont on puisse prouver qu'il est normal.

Les nombres e et π sont, comme d'habitude, de bons candidats d'après les chiffres qu'on en connaît, mais, comme d'habitude aussi, rien n'a été démontré sur leur normalité. Heureusement, *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* sont plus faciles à maîtriser, et l'on a prouvé qu'ils étaient normaux en base 10.

Cette propriété de régularité des décimales d'un nombre, comme les deux précédentes, ne semble pas interférer avec celle d'être transcendant. *Liouville* et *Densité-nulle* sont transcendants sans être normaux, alors que *Champernowne* et *Pair* sont transcendants et normaux.

LES IRRATIONNELS ALGÈBRIQUES

Si l'on fait le bilan des relations indiquées entre les propriétés équationnelles des nombres et les propriétés de leurs décimales, on remarque que (sauf pour les nombres entiers et rationnels, où tout

est très simple) tout semble possible : dès qu'un nombre est irrationnel, son niveau de complexité équationnelle ne paraît pas interagir sur le niveau de complexité de ses décimales, ni l'inverse.

Cette absence d'interaction ne doit pas être considérée comme définitive, car elle résulte d'un certain nombre d'ignorances. La gravité et la profondeur de ces ignorances apparaissent nettement quand on considère le cas des nombres irrationnels algébriques (comme $\sqrt{2}$) : que ce soit à propos de la propriété d'équirépartition, d'universalité ou de normalité, le savoir mathématique concernant les nombres algébriques irrationnels est, aujourd'hui encore, rigoureusement nul.

En effet, d'après ce que nous savons pour l'instant, il se peut que :

- tout nombre algébrique irrationnel soit normal,
- qu'aucun nombre algébrique irrationnel ne soit normal,
- que certains nombres algébriques irrationnels soient normaux et que d'autres ne le soient pas.

Pour l'équirépartition, la situation est la même, ainsi que pour l'universalité. Quant à des propriétés des décimales qui permettraient de distinguer les nombres algébriques exprimables par radicaux et