

«raréfiant à l'infini», c'est-à-dire tel que le nombre d'éléments de A inférieur à n divisé par n , tend vers 0 à l'infini (l'ensemble des nombres premiers ou celui des puissances de 2 sont des exemples de tels ensembles se raréfiant à l'infini).

Le nombre suivant, *Densité-nulle*, égal à 0,1020030000004..., est un mélange entre *Champernowne* et *Liouville* : il nous permettra de répondre à quelques questions simples. Il est constitué des entiers en écriture décimale les uns derrière les autres, séparés de 1! fois «0», puis 2! fois «0», etc.

Ce nombre est un nombre-univers transcendant, mais n'est pas équiréparti, car la densité des «0» tend vers l'unité, alors que la densité des autres chiffres tend vers 0. Par ailleurs, ce nombre-univers n'est pas robuste «aux changements infinis se raréfiant», car, en transformant les chiffres autres que «0» en «0», vous n'effectuez des modifications qu'en des positions se raréfiant à l'infini et obtenez cependant un nombre constitué uniquement de «0», qui n'est plus un nombre-univers. Cela prouve que tous les nombres-univers ne sont pas aussi robustes que les quatre cités ci-dessus. Remarquons aussi que *Densité-nulle* montre qu'on peut tout contenir et malgré cela n'être composé pratiquement que de «0» : même dans un nombre submergé de «0», il y a encore la place pour tout l'univers!

La grande robustesse aux changements des quatre nombres-univers *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* provient d'une propriété en apparence extraordinaire, la normalité, qui est une sorte de synthèse de l'équirépartition et de l'universalité.

LES NOMBRES NORMAUX

Un nombre est normal en base 10 si son développement décimal possède la propriété suivante :

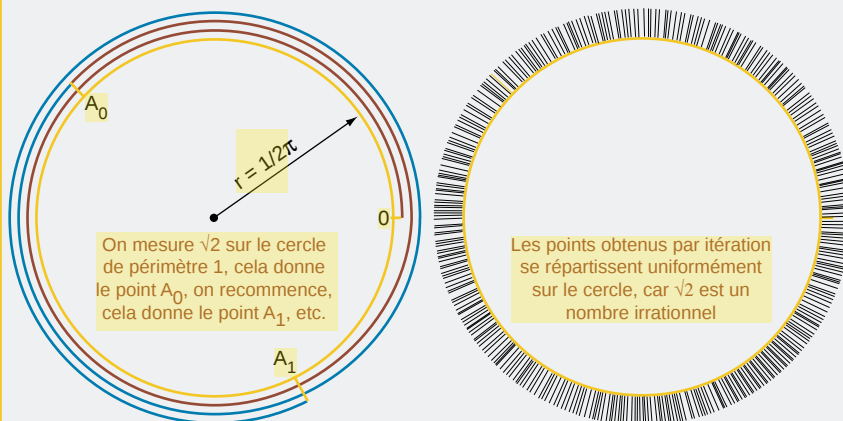
- les 10 chiffres apparaissent en proportions équilibrées (10 pour cent de chaque) ;
- les 100 paires possibles de chiffres consécutifs (00, 01, 02, ..., 99) apparaissent aussi en proportions équilibrées (chacune apparaît avec une fréquence de 1 pour cent) ;
- les 1 000 triplets de chiffres consécutifs (000, 001, ..., 999) apparaissent en proportions équilibrées (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Non seulement dans un nombre normal vous trouvez tout (donc un nombre normal est un nombre-univers), mais tout y sera parfaitement équilibré (un nombre normal est donc un nombre équiréparti). La séquence 37 apparaîtra en moyenne autant de fois que la séquence 72, c'est-à-dire une fois sur 100 ; la séquence

TOUT NOMBRE IRRATIONNEL EST PRESQUE UN NOMBRE-UNIVERS

Le mathématicien Hermann Weyl a fourni en 1916 une caractérisation remarquable des nombres irrationnels qui n'est pas sans rapport avec la notion de nombre-univers.

On trace un cercle de périmètre unité, et donc de rayon $1/2\pi$. On fixe une origine sur ce cercle. On se déplace à partir de l'origine sur le périmètre et, à chaque fois qu'on a parcouru une longueur de x , on marque un point sur le cercle. D'après le résultat de H. Weyl, si x est irrationnel, les marques que l'on fait sont en nombre infini et se répartissent uniformément sur le cercle (comme s'il s'agissait de points choisis au hasard). Si x est rationnel, les marques sont en nombre fini (on s'arrête toujours aux mêmes endroits).



Une conséquence de ce résultat est que si x est irrationnel et si s est une séquence donnée de chiffres (par exemple 43254), alors il existe un multiple de x qui possède cette séquence dans sa représentation décimale. En quelque sorte, pris globalement, les multiples d'un irrationnel ont la propriété qui définit un nombre-univers.

1998 apparaîtra avec une fréquence de 1/10000, comme la séquence 8 642, etc.

Les contraintes qu'on impose à ces nombres sont si nombreuses qu'on peut se demander si elles sont compatibles, c'est-à-dire s'il existe un nombre dont on puisse prouver qu'il est normal.

Les nombres e et π sont, comme d'habitude, de bons candidats d'après les chiffres qu'on en connaît, mais, comme d'habitude aussi, rien n'a été démontré sur leur normalité. Heureusement, *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* sont plus faciles à maîtriser, et l'on a prouvé qu'ils étaient normaux en base 10.

Cette propriété de régularité des décimales d'un nombre, comme les deux précédentes, ne semble pas interférer avec celle d'être transcendant. *Liouville* et *Densité-nulle* sont transcendants sans être normaux, alors que *Champernowne* et *Pair* sont transcendants et normaux.

LES IRRATIONNELS ALGÈBRIQUES

Si l'on fait le bilan des relations indiquées entre les propriétés équationnelles des nombres et les propriétés de leurs décimales, on remarque que (sauf pour les nombres entiers et rationnels, où tout

est très simple) tout semble possible : dès qu'un nombre est irrationnel, son niveau de complexité équationnelle ne paraît pas interagir sur le niveau de complexité de ses décimales, ni l'inverse.

Cette absence d'interaction ne doit pas être considérée comme définitive, car elle résulte d'un certain nombre d'ignorances. La gravité et la profondeur de ces ignorances apparaissent nettement quand on considère le cas des nombres irrationnels algébriques (comme $\sqrt{2}$) : que ce soit à propos de la propriété d'équirépartition, d'universalité ou de normalité, le savoir mathématique concernant les nombres algébriques irrationnels est, aujourd'hui encore, rigoureusement nul.

En effet, d'après ce que nous savons pour l'instant, il se peut que :

- tout nombre algébrique irrationnel soit normal,
- qu'aucun nombre algébrique irrationnel ne soit normal,
- que certains nombres algébriques irrationnels soient normaux et que d'autres ne le soient pas.

Pour l'équirépartition, la situation est la même, ainsi que pour l'universalité. Quant à des propriétés des décimales qui permettraient de distinguer les nombres algébriques exprimables par radicaux et