

«raréfiant à l'infini», c'est-à-dire tel que le nombre d'éléments de A inférieur à n divisé par n , tend vers 0 à l'infini (l'ensemble des nombres premiers ou celui des puissances de 2 sont des exemples de tels ensembles se raréfiant à l'infini).

Le nombre suivant, *Densité-nulle*, égal à 0,1020030000004..., est un mélange entre *Champernowne* et *Liouville* : il nous permettra de répondre à quelques questions simples. Il est constitué des entiers en écriture décimale les uns derrière les autres, séparés de 1! fois «0», puis 2! fois «0», etc.

Ce nombre est un nombre-univers transcendant, mais n'est pas équiréparti, car la densité des «0» tend vers l'unité, alors que la densité des autres chiffres tend vers 0. Par ailleurs, ce nombre-univers n'est pas robuste «aux changements infinis se raréfiant», car, en transformant les chiffres autres que «0» en «0», vous n'effectuez des modifications qu'en des positions se raréfiant à l'infini et obtenez cependant un nombre constitué uniquement de «0», qui n'est plus un nombre-univers. Cela prouve que tous les nombres-univers ne sont pas aussi robustes que les quatre cités ci-dessus. Remarquons aussi que *Densité-nulle* montre qu'on peut tout contenir et malgré cela n'être composé pratiquement que de «0» : même dans un nombre submergé de «0», il y a encore la place pour tout l'univers !

La grande robustesse aux changements des quatre nombres-univers *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* provient d'une propriété en apparence extraordinaire, la normalité, qui est une sorte de synthèse de l'équirépartition et de l'universalité.

LES NOMBRES NORMAUX

Un nombre est normal en base 10 si son développement décimal possède la propriété suivante :

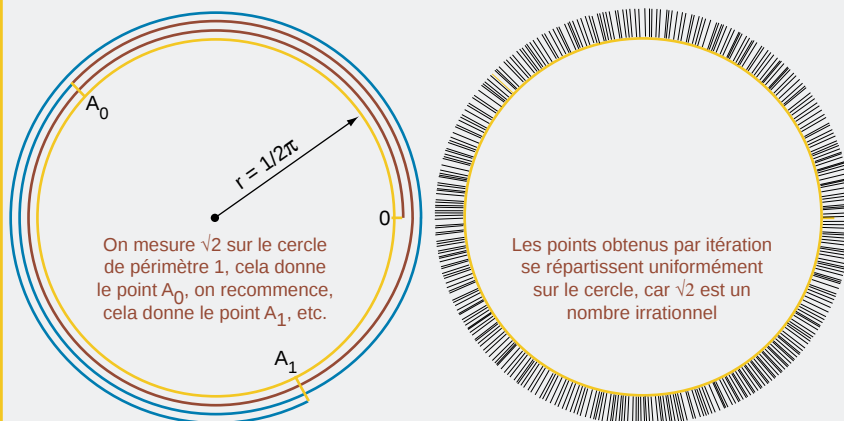
- les 10 chiffres apparaissent en proportions équilibrées (10 pour cent de chaque) ;
- les 100 paires possibles de chiffres consécutifs (00, 01, 02, ..., 99) apparaissent aussi en proportions équilibrées (chacune apparaît avec une fréquence de 1 pour cent) ;
- les 1 000 triplets de chiffres consécutifs (000, 001, ..., 999) apparaissent en proportions équilibrées (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Non seulement dans un nombre normal vous trouvez tout (donc un nombre normal est un nombre-univers), mais tout y sera parfaitement équilibré (un nombre normal est donc un nombre équiréparti). La séquence 37 apparaîtra en moyenne autant de fois que la séquence 72, c'est-à-dire une fois sur 100 ; la séquence

TOUT NOMBRE IRRATIONNEL EST PRESQUE UN NOMBRE-UNIVERS

Le mathématicien Hermann Weyl a fourni en 1916 une caractérisation remarquable des nombres irrationnels qui n'est pas sans rapport avec la notion de nombre-univers.

On trace un cercle de périmètre unité, et donc de rayon $1/2\pi$. On fixe une origine sur ce cercle. On se déplace à partir de l'origine sur le périmètre et, à chaque fois qu'on a parcouru une longueur de x , on marque un point sur le cercle. D'après le résultat de H. Weyl, si x est irrationnel, les marques que l'on fait sont en nombre infini et se répartissent uniformément sur le cercle (comme s'il s'agissait de points choisis au hasard). Si x est rationnel, les marques sont en nombre fini (on s'arrête toujours aux mêmes endroits).



Une conséquence de ce résultat est que si x est irrationnel et si s est une séquence donnée de chiffres (par exemple 43254), alors il existe un multiple de x qui possède cette séquence dans sa représentation décimale. En quelque sorte, pris globalement, les multiples d'un irrationnel ont la propriété qui définit un nombre-univers.

1998 apparaîtra avec une fréquence de 1/10000, comme la séquence 8 642, etc.

Les contraintes qu'on impose à ces nombres sont si nombreuses qu'on peut se demander si elles sont compatibles, c'est-à-dire s'il existe un nombre dont on puisse prouver qu'il est normal.

Les nombres e et π sont, comme d'habitude, de bons candidats d'après les chiffres qu'on en connaît, mais, comme d'habitude aussi, rien n'a été démontré sur leur normalité. Heureusement, *Champernowne*, *Pair*, *Erdős*, *Copeland* sont plus faciles à maîtriser, et l'on a prouvé qu'ils étaient normaux en base 10.

Cette propriété de régularité des décimales d'un nombre, comme les deux précédentes, ne semble pas interférer avec celle d'être transcendant. *Liouville* et *Densité-nulle* sont transcendants sans être normaux, alors que *Champernowne* et *Pair* sont transcendants et normaux.

LES IRRATIONNELS ALGÈBRIQUES

Si l'on fait le bilan des relations indiquées entre les propriétés équationnelles des nombres et les propriétés de leurs décimales, on remarque que (sauf pour les nombres entiers et rationnels, où tout

est très simple) tout semble possible : dès qu'un nombre est irrationnel, son niveau de complexité équationnelle ne paraît pas interagir sur le niveau de complexité de ses décimales, ni l'inverse.

Cette absence d'interaction ne doit pas être considérée comme définitive, car elle résulte d'un certain nombre d'ignorances. La gravité et la profondeur de ces ignorances apparaissent nettement quand on considère le cas des nombres irrationnels algébriques (comme $\sqrt{2}$) : que ce soit à propos de la propriété d'équirépartition, d'universalité ou de normalité, le savoir mathématique concernant les nombres algébriques irrationnels est, aujourd'hui encore, rigoureusement nul.

En effet, d'après ce que nous savons pour l'instant, il se peut que :

- tout nombre algébrique irrationnel soit normal,
- qu'aucun nombre algébrique irrationnel ne soit normal,
- que certains nombres algébriques irrationnels soient normaux et que d'autres ne le soient pas.

Pour l'équirépartition, la situation est la même, ainsi que pour l'universalité. Quant à des propriétés des décimales qui permettraient de distinguer les nombres algébriques exprimables par radicaux et

RÉGULARITÉ DES DÉCIMALES ET TRANSCENDANCE

Les mathématiciens J. Loxton et A. van der Poorten ont récemment établi le remarquable résultat suivant : un nombre automatique est, ou bien rationnel, ou bien transcendant.

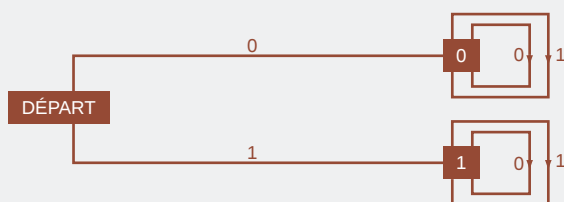
Un nombre x est dit automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer le chiffre numéro n du développement de x en fonction du développement de n (voir exemple plus bas). Les nombres automatiques sont les nombres dont le calcul du développement peut se faire par un moyen élémentaire.

Le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten signifie que, si un nombre possède un développement simple à calculer, alors il est, soit équationnellement simple (c'est un rationnel), soit équationnellement complexe (c'est un nombre transcendant). En conséquence, les nombres algébriques irrationnels (par exemple $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$) ont nécessairement des développements complexes. On est encore loin d'établir que les nombres algébriques irrationnels sont équirépartis, univers ou normaux (ce que certains conjecturent), mais le résultat va dans cette direction.

Deux nombres automatiques

Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un rationnel, l'autre transcendant.

Le nombre rationnel $2/3$ qui s'écrit $0,101010101\dots$ en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le chiffre en position n du développement binaire de $2/3$, il suffit d'utiliser l'automate suivant :

AUTOMATE POUR LA SUITE $2/3 = 0,101010101\dots$

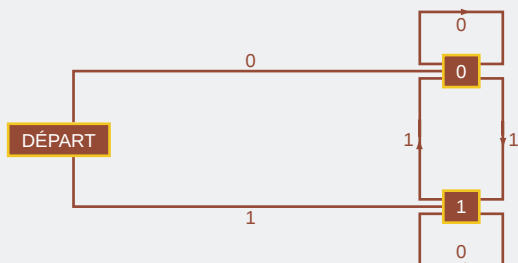
On se place sur le graphe de l'automate en position départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres de n écrit en base 2 en suivant la flèche correspondant au chiffre lu. On se déplace ainsi d'un nœud du graphe à l'autre jusqu'à avoir lu entièrement le développement de n . Le nom du nœud auquel on est arrivé indique alors le chiffre numéro n du développement de x .

Exemple : pour connaître le chiffre 6 de $2/3$, on écrit 6 en base 2, c'est 110, on se place au nœud [départ], on suit les flèches marquées 0, 1, 1, ce qui nous conduit au nœud [0] : le sixième chiffre de $2/3$ en base 2 est un 0.

Le nombre de Thue-Morse est un nombre automatique non périodique, donc il est transcendant (d'après le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten).

Thue-Morse = $0,1101001100101101001011001101001\dots$

Ce nombre est constitué des éléments de la suite de Thue-Morse placés les uns derrière les autres. Le n -ième chiffre est un "1" si l'écriture de n en base 2 comporte un nombre impair de "1" ; sinon c'est un zéro. Le nombre 5, par exemple, s'écrit 101 en base deux, donc le chiffre placé en position 5 après la virgule dans Thue-Morse sera un 0 (101 comporte un nombre pair de 1). La suite des chiffres de Thue-Morse peut aussi être définie en partant de 0, puis en accolant le complément, 1, ce qui donne 01, puis en recommençant à accoler le complément indéfiniment (0110, 01101001, 0110100110010110, etc.) Voici l'automate du nombre de Thue-Morse :

AUTOMATE POUR LA SUITE DE THUE-MORSE = $0,110100110010110\dots$

ceux qui ne le sont pas, personne aujourd'hui n'en a, non plus, la moindre idée.

Quelques résultats un peu compliqués et épars fournissent l'indice que certaines relations pourraient avoir cours : il se pourrait d'ailleurs que tout nombre algébrique irrationnel soit équiréparti, univers et normal. Les calculs numériques sur $\sqrt{2}$ en montrent la possibilité.

Le résultat récent de J. Loxton et A. van der Poorten est qu'un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant : il semble accréditer l'hypothèse que tout nombre dont les décimales sont régulières est, soit équationnellement très simple (c'est-à-dire rationnel), soit équationnellement très compliqué (c'est-à-dire transcendant). Le fait que *Champernowne* et *Liouville* soient transcendants ne serait alors que la conséquence de la régularité de leurs décimales conjointe avec leur non-périodicité.

La recherche des ponts entre les propriétés équationnelles (qui sont indépendantes de la base de numération) et les propriétés liées aux chiffres des nombres (liées à la base de numération) semble d'une grande difficulté. La situation est comparable à celle de la conjecture de Goldbach, qui indique que tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (conjecture toujours non démontrée) : la propriété d'être un nombre premier est une propriété multiplicative (liée à la multiplication), celle d'être une somme de deux nombres premiers est avant tout une propriété additive (liée à l'addition). Démontrer la conjecture de Goldbach nécessite donc d'établir un pont entre deux zones éloignées de l'univers mathématique, ce qui est difficile, comme l'est la construction d'un pont entre les propriétés équationnelles et les propriétés des développements des nombres. Les mathématiciens regardent les objets du monde abstrait sous divers angles, ils essaient de les mettre en relation et parfois, malgré leur désir acharné d'y parvenir, ils s'avouent temporairement impuissants.

D.G. CHAMPERNOWNE, *The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten*, in *J. London Math. Soc.*, 8, pp. 254-260, 1933.

A. COPELAND et P. ERDÖS, *Note on Normal Numbers*, in *Bulletin American Mathematical Society*, 52, pp. 857-860, 1946.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Math. Association of America, Dolciani Math. Expositions, n° 11, 1993.

J.H. LOXTON et A. J. van der POORTEN, *Arithmetic Properties of Automata...* *J. reine angew. Math.* 392, pp. 57-69, 1988.