

RÉGULARITÉ DES DÉCIMALES ET TRANSCENDANCE

Les mathématiciens J. Loxton et A. van der Poorten ont récemment établi le remarquable résultat suivant : un nombre automatique est, ou bien rationnel, ou bien transcendant.

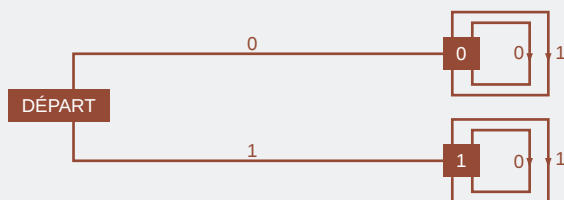
Un nombre x est dit automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer le chiffre numéro n du développement de x en fonction du développement de n (voir exemple plus bas). Les nombres automatiques sont les nombres dont le calcul du développement peut se faire par un moyen élémentaire.

Le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten signifie que, si un nombre possède un développement simple à calculer, alors il est, soit équationnellement simple (c'est un rationnel), soit équationnellement complexe (c'est un nombre transcendant). En conséquence, les nombres algébriques irrationnels (par exemple $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$) ont nécessairement des développements complexes. On est encore loin d'établir que les nombres algébriques irrationnels sont équirépartis, univers ou normaux (ce que certains conjecturent), mais le résultat va dans cette direction.

Deux nombres automatiques

Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un rationnel, l'autre transcendant.

Le nombre rationnel $2/3$ qui s'écrit $0,101010101\dots$ en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le chiffre en position n du développement binaire de $2/3$, il suffit d'utiliser l'automate suivant :

AUTOMATE POUR LA SUITE $2/3 = 0,101010101\dots$

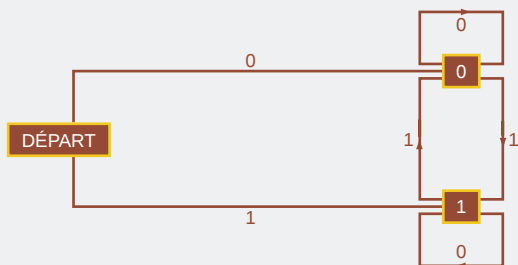
On se place sur le graphe de l'automate en position départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres de n écrit en base 2 en suivant la flèche correspondant au chiffre lu. On se déplace ainsi d'un nœud du graphe à l'autre jusqu'à avoir lu entièrement le développement de n . Le nom du nœud auquel on est arrivé indique alors le chiffre numéro n du développement de x .

Exemple : pour connaître le chiffre 6 de $2/3$, on écrit 6 en base 2, c'est 110, on se place au nœud [départ], on suit les flèches marquées 0, 1, 1, ce qui nous conduit au nœud [0] : le sixième chiffre de $2/3$ en base 2 est un 0.

Le nombre de Thue-Morse est un nombre automatique non périodique, donc il est transcendant (d'après le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten).

Thue-Morse = $0,1101001100101101001011001101001\dots$

Ce nombre est constitué des éléments de la suite de Thue-Morse placés les uns derrière les autres. Le n -ième chiffre est un "1" si l'écriture de n en base 2 comporte un nombre impair de "1" ; sinon c'est un zéro. Le nombre 5, par exemple, s'écrit 101 en base deux, donc le chiffre placé en position 5 après la virgule dans Thue-Morse sera un 0 (101 comporte un nombre pair de 1). La suite des chiffres de Thue-Morse peut aussi être définie en partant de 0, puis en accolant le complément, 1, ce qui donne 01, puis en recommençant à accoler le complément indéfiniment (0110, 01101001, 0110100110010110, etc.) Voici l'automate du nombre de Thue-Morse :

AUTOMATE POUR LA SUITE DE THUE-MORSE = $0,110100110010110\dots$

ceux qui ne le sont pas, personne aujourd'hui n'en a, non plus, la moindre idée.

Quelques résultats un peu compliqués et épars fournissent l'indice que certaines relations pourraient avoir cours : il se pourrait d'ailleurs que tout nombre algébrique irrationnel soit équiréparti, univers et normal. Les calculs numériques sur $\sqrt{2}$ en montrent la possibilité.

Le résultat récent de J. Loxton et A. van der Poorten est qu'un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant : il semble accréditer l'hypothèse que tout nombre dont les décimales sont régulières est, soit équationnellement très simple (c'est-à-dire rationnel), soit équationnellement très compliqué (c'est-à-dire transcendant). Le fait que Champernowne et Liouville soient transcendants ne serait alors que la conséquence de la régularité de leurs décimales conjointe avec leur non-périodicité.

La recherche des ponts entre les propriétés équationnelles (qui sont indépendantes de la base de numération) et les propriétés liées aux chiffres des nombres (liées à la base de numération) semble d'une grande difficulté. La situation est comparable à celle de la conjecture de Goldbach, qui indique que tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (conjecture toujours non démontrée) : la propriété d'être un nombre premier est une propriété multiplicative (liée à la multiplication), celle d'être une somme de deux nombres premiers est avant tout une propriété additive (liée à l'addition). Démontrer la conjecture de Goldbach nécessite donc d'établir un pont entre deux zones éloignées de l'univers mathématique, ce qui est difficile, comme l'est la construction d'un pont entre les propriétés équationnelles et les propriétés des développements des nombres. Les mathématiciens regardent les objets du monde abstrait sous divers angles, ils essaient de les mettre en relation et parfois, malgré leur désir acharné d'y parvenir, ils s'avouent temporairement impuissants.

D.G. CHAMPERNOWNE, *The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten*, in *J. London Math. Soc.* 8, pp. 254-260, 1933.

A. COPELAND et P. ERDÖS, *Note on Normal Numbers*, in *Bulletin American Mathematical Society*, 52, pp. 857-860, 1946.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Math. Association of America, Dolciani Math. Expositions, n° 11, 1993.

J.H. LOXTON et A. J. van der POORTEN, *Arithmetic Properties of Automata...* *J. reine angew. Math.* 392, pp. 57-69, 1988.