

RÉGULARITÉ DES DÉCIMALES ET TRANSCENDANCE

Les mathématiciens J. Loxton et A. van der Poorten ont récemment établi le remarquable résultat suivant : un nombre automatique est, ou bien rationnel, ou bien transcendant.

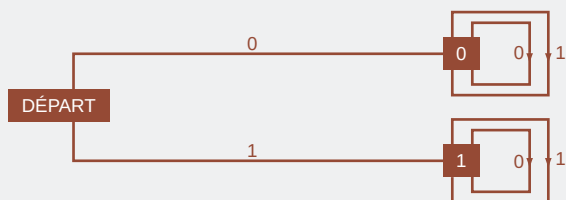
Un nombre x est dit automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer le chiffre numéro n du développement de x en fonction du développement de n (voir exemple plus bas). Les nombres automatiques sont les nombres dont le calcul du développement peut se faire par un moyen élémentaire.

Le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten signifie que, si un nombre possède un développement simple à calculer, alors il est, soit équationnellement simple (c'est un rationnel), soit équationnellement complexe (c'est un nombre transcendant). En conséquence, les nombres algébriques irrationnels (par exemple $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$) ont nécessairement des développements complexes. On est encore loin d'établir que les nombres algébriques irrationnels sont équirépartis, univers ou normaux (ce que certains conjecturent), mais le résultat va dans cette direction.

Deux nombres automatiques

Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un rationnel, l'autre transcendant.

Le nombre rationnel $2/3$ qui s'écrit $0,101010101\dots$ en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le chiffre en position n du développement binaire de $2/3$, il suffit d'utiliser l'automate suivant :



AUTOMATE POUR LA SUITE $2/3 = 0,101010101\dots$

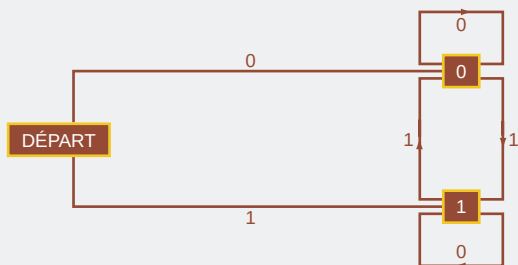
On se place sur le graphe de l'automate en position départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres de n écrit en base 2 en suivant la flèche correspondant au chiffre lu. On se déplace ainsi d'un nœud du graphe à l'autre jusqu'à avoir lu entièrement le développement de n . Le nom du nœud auquel on est arrivé indique alors le chiffre numéro n du développement de x .

Exemple : pour connaître le chiffre 6 de $2/3$, on écrit 6 en base 2, c'est 110, on se place au nœud [départ], on suit les flèches marquées 0, 1, 1, ce qui nous conduit au nœud [0] : le sixième chiffre de $2/3$ en base 2 est un 0.

Le nombre de Thue-Morse est un nombre automatique non périodique, donc il est transcendant (d'après le résultat de J. Loxton et A. van der Poorten).

Thue-Morse = $0,1101001100101101001011001101001\dots$

Ce nombre est constitué des éléments de la suite de Thue-Morse placés les uns derrière les autres. Le n -ième chiffre est un "1" si l'écriture de n en base 2 comporte un nombre impair de "1" ; sinon c'est un zéro. Le nombre 5, par exemple, s'écrit 101 en base deux, donc le chiffre placé en position 5 après la virgule dans Thue-Morse sera un 0 (101 comporte un nombre pair de 1). La suite des chiffres de Thue-Morse peut aussi être définie en partant de 0, puis en accolant le complément, 1, ce qui donne 01, puis en recommençant à accoler le complément indéfiniment (0110, 01101001, 0110100110010110, etc.) Voici l'automate du nombre de Thue-Morse :



AUTOMATE POUR LA SUITE DE THUE-MORSE = $0,1101001100101101001101001\dots$

ceux qui ne le sont pas, personne aujourd'hui n'en a, non plus, la moindre idée.

Quelques résultats un peu compliqués et épars fournissent l'indice que certaines relations pourraient avoir cours : il se pourrait d'ailleurs que tout nombre algébrique irrationnel soit équiréparti, univers et normal. Les calculs numériques sur $\sqrt{2}$ en montrent la possibilité.

Le résultat récent de J. Loxton et A. van der Poorten est qu'un nombre automatique est soit rationnel, soit transcendant : il semble accréditer l'hypothèse que tout nombre dont les décimales sont régulières est, soit équationnellement très simple (c'est-à-dire rationnel), soit équationnellement très compliqué (c'est-à-dire transcendant). Le fait que *Champernowne* et *Liouville* soient transcendants ne serait alors que la conséquence de la régularité de leurs décimales conjointe avec leur non-périodicité.

La recherche des ponts entre les propriétés équationnelles (qui sont indépendantes de la base de numération) et les propriétés liées aux chiffres des nombres (liées à la base de numération) semble d'une grande difficulté. La situation est comparable à celle de la conjecture de Goldbach, qui indique que tout nombre pair est somme de deux nombres premiers (conjecture toujours non démontrée) : la propriété d'être un nombre premier est une propriété multiplicative (liée à la multiplication), celle d'être une somme de deux nombres premiers est avant tout une propriété additive (liée à l'addition). Démontrer la conjecture de Goldbach nécessite donc d'établir un pont entre deux zones éloignées de l'univers mathématique, ce qui est difficile, comme l'est la construction d'un pont entre les propriétés équationnelles et les propriétés des développements des nombres. Les mathématiciens regardent les objets du monde abstrait sous divers angles, ils essaient de les mettre en relation et parfois, malgré leur désir acharné d'y parvenir, ils s'avouent temporairement impuissants.

D.G. CHAMPERNOWNE, *The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten*, in *J. London Math. Soc.*, 8, pp. 254-260, 1933.

A. COPELAND et P. ERDÖS, *Note on Normal Numbers*, in *Bulletin American Mathematical Society*, 52, pp. 857-860, 1946.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Math. Association of America, Dolciani Math. Expositions, n° 11, 1993.

J.H. LOXTON et A. J. van der POORTEN, *Arithmetic Properties of Automata...* *J. reine angew. Math.* 392, pp. 57-69, 1988.

Histoire des sciences

Le darwinisme social en France (1859-1918). Fascination et rejet d'une idéologie

Jean-Marc Bernardini. CNRS Éditions, 1997.

Deux dates symboliques limitent la période de cette étude historique du darwinisme social en France : la première, 1859, est celle de la parution de *l'Origine des espèces*, l'œuvre magistrale de Charles Darwin (1809-1882) ; la seconde marque la fin de la Première Guerre mondiale. Si la révolution darwinienne correspond au renversement du dogme de la fixité des espèces et à la démonstration de leur évolution par la sélection naturelle, le darwinisme social, de réputation sulfureuse, demeure difficile à cerner.

En effet, «défini comme l'extension aux sociétés humaines des lois darwiniennes de la lutte pour l'existence et de la sélection naturelle», ce n'est plus une théorie scientifique, mais une idéologie, qui peut susciter l'adhésion, la fascination ou le rejet. Serait-ce uniquement l'apologie de la force brutale, du cynisme d'une société qui favorise les meilleurs et élimine les moins favorisés, y compris par des mesures eugénistes coercitives ? Le darwinisme social peut aussi présenter des caractéristiques modérées, de sorte qu'il a pu séduire des représentants de tous les bords politiques, philosophiques, littéraires, religieux ou scientifiques. Combien d'opinions, de prises de position ambiguës et changeantes ont été prononcées et écrites au nom du darwinisme social !

Pourquoi Jean-Baptiste de Lamarck (1744-1829) n'a-t-il pas engendré un tel déferlement d'opinions, alors qu'il a proclamé le transformisme des espèces, dès le début du XIX^e siècle ? Sans doute parce qu'il n'a jamais rédigé un texte comparable à *La descendance de l'homme et la sélection sexuelle* (1871). Dans cet ouvrage, Dar-

win hiérarchise le monde vivant : à partir d'une forme ancestrale unique, il classe les animaux inférieurs et supérieurs, les «races humaines» inférieures et supérieures (sans oublier les femmes et les hommes). Le sommet de l'édifice est naturellement l'homme blanc de la civilisation occidentale.

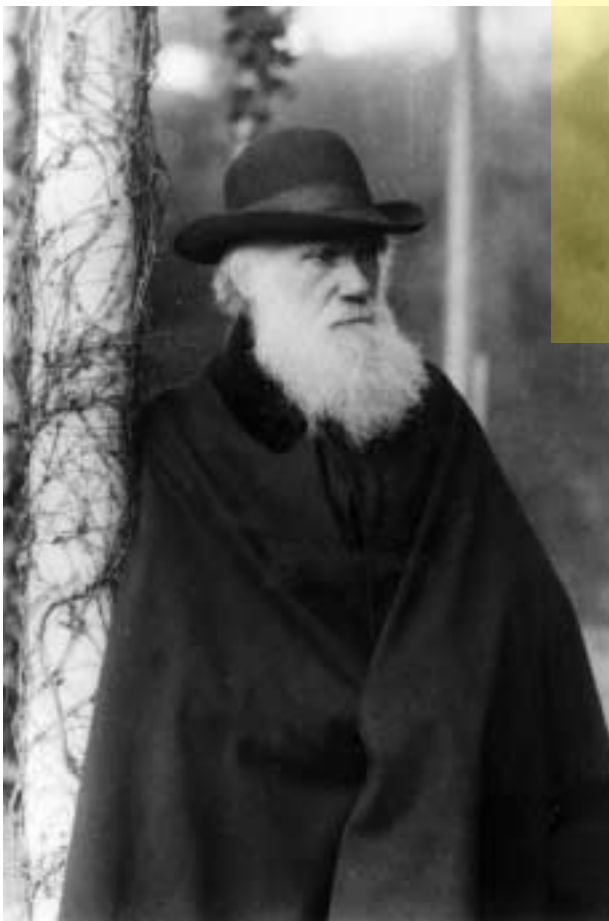
Darwin croit en l'évolution et en l'amélioration de l'homme, mais il comprend l'inefficacité de la sélection naturelle dans une société où l'on pratique la charité et l'aide médicale aux défavorisés. Il accepte ce constat, et refuse la violence et l'élimination. Il est donc le fondateur du darwinisme social, dans sa version modérée. Lui reprocher les dérives engendrées par ses écrits serait abusif, même s'il en a fourni les arguments, bien relayé par le philosophe Herbert Spencer (1820-1903) et l'eugéniste Francis Galton (1822-1911) : ce dernier, cousin de Darwin, propose des solutions concrètes pour lutter contre la «dégénérescence de la race».

De 1859 à la fin du XIX^e siècle, on assiste, en France, à l'imprégnation de ce que Jean-Marc Bernardini qualifie de «culture darwinienne», puis du darwinisme social, qui s'instaure à partir des années 1870. L'évolutionnisme est asso-

cié au matérialisme, à l'athéisme et à la morale républicaine, qui propose la science comme substitut à la religion. Les sciences biologiques sont repliées sur leurs débats internes, tandis que les sciences sociales cherchent la légitimation de disciplines émergentes comme la sociologie ou l'économie politique. L'audience du darwinisme grandit et bénéficie d'un réseau efficace de scientifiques et d'hommes politiques, d'écrivains ou d'historiens : Ernest Renan (1823-1892), Hippolyte Taine (1828-1893), Edgar Quinet (1803-1875) ou Émile Zola (1840-1902) qui, dans *Germinal*, fait discuter Étienne et l'anarchiste Souvarine à propos de Darwin et du combat pour l'existence.

Évidemment l'Église réagit, avant d'admettre un transformisme limité au monde animal et végétal, sans aller jusqu'à l'homme (en tout cas, pas au-delà de son enveloppe charnelle). La période est marquée par un balancement des idées entre le darwinisme social et un néo-lamarckisme qui accorde une importance primordiale au milieu (on insiste beaucoup sur le rôle de l'éducation). La vie de la nation interagit avec cette réflexion philosophique à l'occasion de la guerre contre la Prusse, en 1870, de la Commune, en 1871, du colonialisme (parfaite illustration des lois darwiniennes, on considère alors ce dernier comme «la vitalité, la force ou la capacité des races vigoureuses à s'étendre hors de leurs frontières»), du solidarisme, dans les années 1890 (avec des idées fortes d'association, de coopération, d'assistance, d'aide mutuelle comme moyens d'adoucir la lutte), et de la concurrence industrielle.

Puis, au début du XX^e siècle, la fascination cesse brusquement, et le darwinisme social devient haïssable. C'est le mondain Ferdinand Brunetière (1849-1906), critique littéraire à la *Revue des Deux Mondes* et membre de l'Académie française, qui lance le pavé dans la mare : il ne remet pas en question le transformisme, mais il dénonce la «faillite de la science», incapable d'élucider l'origine de l'homme et son devenir, incapable de proposer une morale ; dans la foulée, il prône un retour à la religion. On dénonce alors les excès du darwinisme, parfaitement illustrés par Georges Vacher de Lapouge (1854-1936), dont l'aryanisme darwinien exacerbé illustre toute l'horreur des dérives racistes.



Charles Darwin proposa d'étendre aux sociétés humaines les lois de la lutte pour l'existence et de la sélection naturelle.

Le darwinisme social étant associé aux nations anglaise et allemande, le pays se réfugie dans le chauvinisme et se crispe sur un néo-lamarckisme qui, après le conflit de 1914-1918, handicaperait la biologie française.

Dans ce livre, qu'il est illusoire de vouloir résumer en quelques lignes, les idées sont essentielles et sensibles. J.-M. Bernardini démontre avec rigueur, avec clarté, preuves abondantes à l'appui, combien la France peut être à la fois brillante intellectuellement et bloquée par l'adhésion tardive à des théories dépassées, au moment où il faudrait passer aux suivantes. Ignorer le lamarckisme au début du XIX^e siècle était une erreur, le reconnaître un siècle plus tard en écartant le darwinisme devenait de l'aveuglement. C'est dire que la lecture de ce livre est fondamentale pour comprendre notre XX^e siècle finissant, à la fois dans son évolution scientifique et idéologique.

Michèle FEBVRE



Mesure de terres agricoles dans l'Égypte ancienne.

Technique

La mesure

Jean Perdigon. Éditions Flammarion, 1998.

Ce petit livre se donne 128 pages de petit format, conformément à l'idée de la collection (Dominos), pour présenter la mesure. Redoutable sujet : en métrologie, comme en chimie analytique, l'objet central est la méthode plutôt que les fruits qu'elle porte. Or, la méthode, c'est l'intendance, et celle-ci suit toujours, dit-on. Les grands esprits devraient-ils alors se préoccuper de mesure ? Le physicien William Thomson Kelvin donna des lettres de noblesse à la mesure lors d'une conférence, en 1883 : «Je dis souvent que, lorsqu'on peut mesurer ce dont on parle et l'exprimer en chiffres, on en sait quelque chose ; en revanche, si on ne peut l'exprimer en chiffres, on en a une bien piètre connaissance.» Et Philolaos (V^e siècle avant notre ère) : «Tout être connaissable a un nombre ; sans celui-ci, on ne saurait rien concevoir ni rien connaître.» Ou encore Galilée : «La science nouvelle met en lumière, à travers les relations de la causalité empirique, une proportionnalité constante, la loi, et cela dans la mesure où elle donne à ces rapports empiriques une expression quantitative et géométrique.

Le monde, ce monde divers, aux accents et aux apparences innombrables, se révèle alors comme un tout harmonieux où chaque partie répond à l'autre.»

Toutes ces citations proviennent de cet ouvrage qui sait si bien remettre en culture des idées techniques. Il y a de tout : de la philosophie de la mesure, nous l'avons vu, mais aussi de l'histoire, qui nous montre l'état de l'art avant le système métrique : «Prenez 16 hommes, des petits et des grands, au moment où ils sortent de l'église, et demandez-leur de poser un pied après l'autre ; et la longueur ainsi obtenue fournira une règle juste et commune pour mesurer les champs.»

Mieux encore, l'auteur va jusqu'à relire Sigmund Freud, qui se préoccupe de méthode dans sa *Métapsychologie* : «Nous avons souvent entendu formuler l'exigence suivante : une science doit être construite sur des concepts fondamentaux clairs et nettement définis. En réalité, aucune science, même la plus exacte, ne commence par de telles définitions. Le véritable commencement de toute activité scientifique consiste plutôt dans la description de phénomènes qui sont ensuite rassemblés, ordonnés et insérés dans des relations. Dans la description, déjà, on ne peut éviter d'appliquer au matériel certaines idées abstraites que l'on puise ici ou là, et certainement pas dans la seule expérience actuelle. Ce n'est qu'après un examen plus approfondi du domaine de phénomènes consi-

dérés que l'on peut aussi saisir plus précisément les concepts scientifiques fondamentaux qu'il requiert et les modifier progressivement pour les rendre largement utilisables, ainsi que libres de toute contradiction. C'est alors qu'il peut être temps de les enfermer dans des définitions.» René Thom le rejoint : «Si l'on n'a pas le concept d'un objet, on ne le reconnaît pas.»

Et, pour finir notre présentation de ce livre par les hommes qu'il invoque, mentionnons Binet, père du «quotient intellectuel», qui prétendait avec une suffisance excessive : «L'intelligence, c'est ce que mesure mon test.» À quoi Albert Jacquard répond fort justement : «Il serait important de savoir ce que mesure ce fameux QI. La réponse est qu'il ne mesure rigoureusement rien. Or on gâche des enfants en raison de leur QI. On peut leurrer toute une population en donnant des nombres, parce que le nombre apparaît comme une vérité scientifique. Chacun est ainsi persuadé de savoir quelque chose. On camoufle la misère conceptuelle par un nombre. Le jour où les mesures du QI comporteront des décimales, il sera encore plus crédible. Il ne mesure rien qui préexiste à sa mesure. On mesure, avec un certain nombre de techniques, une chose dont on ignore si elle existe réellement.»

La mesure, ses méthodes, ses limites, son intelligence : voilà tout ce que vous trouverez dans ce petit livre épatant.

Michel RICHTER