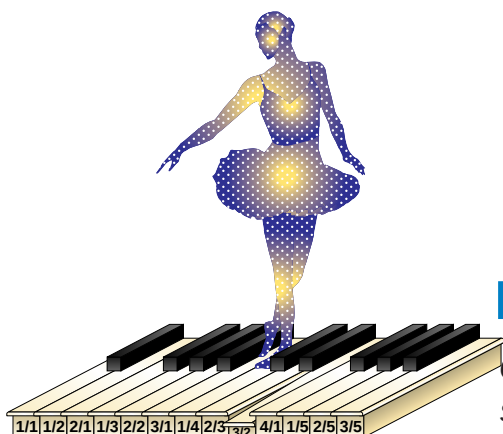




Négligeable, mais troublant

JEAN-PAUL DELAHAYE

Certains ensembles infinis et partout denses sont négligeables... et ce n'est pas un paradoxe.

Le point n'a pas d'épaisseur : en enlevant successivement des points à une droite, nous ne la vidons jamais. Nous pouvons même en enlever 1 000 milliards sans y créer de trou véritable : un être se déplaçant dans ce qui reste, en faisant des pas aussi petits que l'on veut, pourra toujours aller de n'importe quel point à n'importe quel autre (voir la figure 1).

C'est seulement quand nous enlevons un intervalle complet à une droite que le déplacement des êtres aux trop petites jambes est impossible. En ôtant par exemple l'intervalle $[-1, +1]$ (tous les nombres compris entre -1 et $+1$), nous interdisons le passage de la partie positive à la partie négative à un marcheur dont les pas sont de longueur inférieure à 2, car il ne peut franchir le trou central, trop large.

Même la suppression d'un ensemble infini, comme l'ensemble des nombres rationnels (quotients de deux entiers), ne gêne pas la démarche à petits pas des êtres minuscules. Aussi n'est-ce pas la finitude ou l'infinitude qui permet d'élucider le problème : d'autres notions sont nécessaires pour étudier quels sont les trous négligeables de l'ensemble des nombres réels. Quelles sont ces notions ? Pouvons-nous examiner ce qui reste des ensembles « quand on leur a presque tout enlevé » ?

Le domaine des mathématiques, dénommé topologie de la droite réelle ou théorie du continu, s'est constitué pour traiter ce sujet. Cette théorie est troublante : alors que tout s'y développe de manière parfaitement rationnelle, le visiteur s'y trouve vite confronté à des situations presque paradoxales où l'intuition hésite et vacille.

La crainte de tomber sur des contradictions et l'idée préconçue que la compréhension de l'infini pris comme un tout (ce qu'on appelle l'infini actuel) était réservée à Dieu, ont longtemps paralysé les mathématiciens. Ce n'est qu'au XIX^e siècle que Bernhard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897), Richard

Dedekind (1831-1916) et Georg Cantor (1845-1918) ont découvert que l'on peut classer et comparer les sous-ensembles infinis de l'ensemble des nombres réels sans rencontrer de contradictions. Ce fut

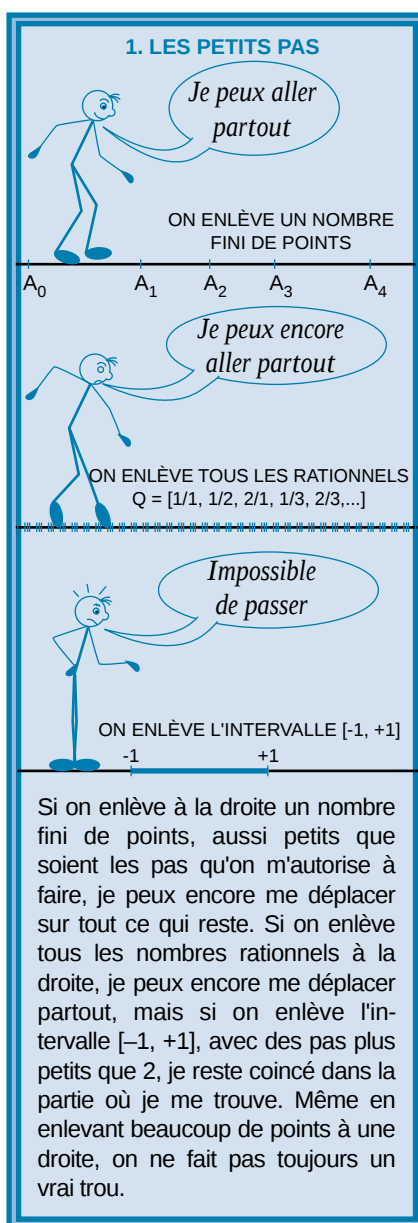
un émerveillement qui bouleversa les mathématiciens et en troubla gravement certains (Cantor est mort fou). Cela fait déjà un siècle que nous avons pénétré cet univers dangereux, et nous n'avons pas rencontré de paradoxes fatals. Après une période d'instabilité et de doute au début du XX^e siècle – période appelée « crise des fondements » –, les mathématiciens ont mis au point une théorie des ensembles qui apparaît inébranlable et sert de support à la topologie.

Est-il néanmoins si sûr que tout soit bien résolu ? Certains logiciens et philosophes soutiennent que nous sommes toujours au bord du précipice. L'heuristique de Borel que nous allons présenter et que les résultats récents de mathématiques expérimentales rendent vraisemblable est une des marques flagrantes de cette étrangeté du monde de la topologie.

LE NÉGLIGEABLE

L'heuristique de Borel se fonde sur la notion d'ensemble négligeable (ou ensemble de mesure nulle). Par définition, un sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels est négligeable si on peut l'enfermer dans une suite – finie ou infinie – d'intervalles dont la longueur totale est aussi petite qu'on veut. Cette définition a été formulée pour la première fois en 1881 par A. Harnack dans un travail sur l'intégrale de Riemann, mais c'est Borel, en 1894, qui établira la théorie complète des ensembles mesurables.

Un point A à lui seul est un ensemble négligeable, car on peut l'enfermer dans l'intervalle $[A - 1/100, A + 1/100]$ qui a pour longueur $1/50$ (la longueur de l'intervalle $[a, b]$ des nombres compris entre a et b est $b - a$). En prenant $1/1\,000$ à la place de $1/100$, on enfermerait A dans un intervalle de longueur $1/500$, et finalement, quelle que soit la longueur L positive qu'on se donne, A peut être enfermé dans un intervalle de longueur L : $[A - L/2, A + L/2]$. Un ensemble fini de points, par exemple



Si on enlève à la droite un nombre fini de points, aussi petits que soient les pas qu'on m'autorise à faire, je peux encore me déplacer sur tout ce qui reste. Si on enlève tous les nombres rationnels à la droite, je peux encore me déplacer partout, mais si on enlève l'intervalle $[-1, +1]$, avec des pas plus petits que 2, je reste coincé dans la partie où je me trouve. Même en enlevant beaucoup de points à une droite, on ne fait pas toujours un vrai trou.

$A_1, A_2, \dots, A_i$, est aussi un ensemble négligeable, car on peut enfermer chaque point au centre d'un intervalle de longueur aussi petite que l'on désire, et la longueur totale sera aussi petite qu'on le souhaite.

Et les ensembles infinis ? Prenons un ensemble infini de points numérotés par les nombres entiers $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$. Un tel ensemble est un ensemble infini dénombrable, et l'on sait que l'ensemble des nombres rationnels est un ensemble infini dénombrable (voir la figure 2). Un tel ensemble est-il négligeable ? Oui ! Voyons pourquoi. Nous allons d'abord enfermer l'ensemble de tous les points A_i dans une suite d'intervalles de longueur totale 2. Pour cela, nous prendrons l'intervalle $[A_0 - 1/2, A_0 + 1/2]$ qui contient A_0 , puis $[A_1 - 1/4, A_1 + 1/4]$ qui contient A_1 , puis $[A_2 - 1/8, A_2 + 1/8]$ qui contient A_2 , etc. La longueur du premier intervalle est 1, la longueur du second est $1/2$, la longueur du troisième est $1/4$, etc. Au total, la longueur cumulée de tous les intervalles qui enferment les A_i est donc $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ somme infinie qui vaut exactement 2. Pour nous persuader que $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$, nous calculons : $1 + 1/2 = 2 - 1/2$; $1 + 1/2 + 1/4 = 2 - 1/4$; $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2 - 1/8$, etc. L'écart avec 2 diminue de plus en plus ; à l'infini, il est nul.

Il est donc possible d'enfermer tout l'ensemble infini des A_i dans une suite d'intervalles de longueur totale 2. Si nous réduisons maintenant la longueur de tous les intervalles d'un facteur 100 avec les points A_i toujours au centre de chacun, la longueur cumulée des intervalles est 100 fois plus petite que précédemment, c'est-à-dire $2/100 = 1/50$. Le procédé de rétrécissement est général, et nous pouvons donc construire une suite d'intervalles qui enfermera tous les A_i et dont la somme des longueurs sera $1/500$, ou $1/500\,000$, ou n'importe quel nombre aussi petit que nous le souhaitons. Cela signifie exactement que l'ensemble infini des A_i est négligeable.

Ce n'est pas troublant si nous pensons par exemple à $A_i = i$, car cela signifie que l'ensemble des nombres entiers est une partie négligeable des nombres réels, ce que notre intuition nous suggérerait déjà. En revanche, le résultat est beaucoup plus troublant quand A_i est l'ensemble des nombres rationnels.

Alors que les nombres rationnels sont partout en nombre infini (entre deux nombres réels, il y a toujours une infinité de nombres rationnels, voir la figure 2b), il est possible de les enfermer tous dans une suite d'intervalles dont la longueur totale est $1/1\,000$. Cela semble paradoxal : l'ensemble des nombres rationnels, quoique infini et partout dense (au voisinage d'un nombre réel, il y a un nombre

2. INFINI DÉNOMBRABLE ET PARTOUT DENSE

(a) L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable (c'est-à-dire peut être mis en correspondance terme à terme avec l'ensemble des entiers).

On prend les fractions irréductibles dont la somme du numérateur et du dénominateur fait 2. Il n'y a que $1/1$, on l'associe à l'entier 0. On prend ensuite toutes les fractions irréductibles dont la somme du numérateur et du dénominateur fait 3. Il y a $2/1$ et $1/2$. On les associe à 1 et 2. Etc.

1/1	2/1	1/2	3/1	1/3	4/1	3/2	2/3	1/4
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Dans cette liste, tout nombre rationnel positif apparaît. Les nombres rationnels constituent un ensemble infini dénombrable.

En revanche, Cantor a découvert que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable : c'est un infini plus gros. Il est impossible de numéroté les réels avec les entiers, comme nous venons de le faire pour les rationnels.

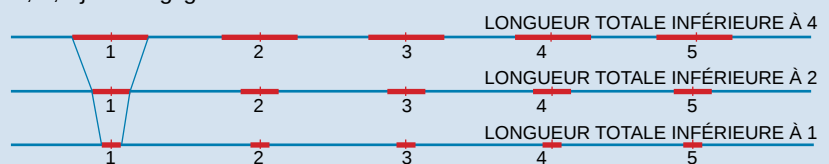
(b) L'ensemble des nombres rationnels est partout dense dans $\mathbb{R}$.

Entre deux nombres réels a, b quelconques, il y a toujours un nombre rationnel. En effet, si a et b sont différents, leurs développements décimaux sont différents à partir d'un certain chiffre, par exemple : $a = 0,183466345\dots$, $b = 0,183472128\dots$. Le rationnel $0,18347 = 18347/100\,000$ est entre a et b .

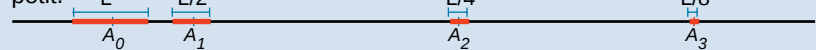
Entre deux nombres réels différents, il y a une infinité de nombres rationnels ; ici, on pourrait prendre $0,18347$; $0,183472$; $0,1834721$; $0,183472128$.

3. ENSEMBLES NÉGLIGEABLES

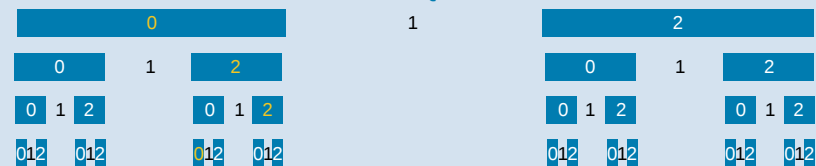
Un ensemble est négligeable si on peut le recouvrir avec des intervalles dont la longueur totale est aussi petite qu'on le veut. Ainsi, l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est négligeable.



L'ensemble Q des nombres rationnels est négligeable, car, en utilisant des intervalles de longueur $L/2, L/4, L/8$, etc., on peut enfermer tous les nombres rationnels dans un intervalle de longueur L choisi arbitrairement petit.



4. ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR



L'ensemble triadique de Cantor s'obtient en partant de l'intervalle $[0,1]$ auquel on enlève le tiers médian. On enlève à nouveau le tiers médian à chacun des deux intervalles qui restaient, puis on recommence indéfiniment. Ce qui reste à l'infini est non dénombrable et négligeable. L'ensemble de Cantor est l'ensemble de nombres dont le développement en base 3 ne comporte que des 0 et des 2, comme : $0,02200202200\dots$ (le tiers médian enlevé à la première étape correspond aux nombres dont le premier chiffre est un 1 ; les tiers enlevés à la seconde étape correspondent aux nombres dont le second chiffre est un 1 ; etc.). En associant à ce nombre de l'ensemble triadique de Cantor le nombre réel dont l'écriture en base 2 est $0,0110010101100\dots$ (on a remplacé les 2 par des 1), on définit une correspondance élément par élément entre les réels compris entre 0 et 1 et l'ensemble de Cantor. Ainsi l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable, mais il est négligeable : à l'étape n de sa construction, il peut être enfermé dans un ensemble d'intervalles de longueur totale $(2/3)^n$, quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.