

$A_1, A_2, \dots, A_i$, est aussi un ensemble négligeable, car on peut enfermer chaque point au centre d'un intervalle de longueur aussi petite que l'on désire, et la longueur totale sera aussi petite qu'on le souhaite.

Et les ensembles infinis ? Prenons un ensemble infini de points numérotés par les nombres entiers $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$. Un tel ensemble est un ensemble infini dénombrable, et l'on sait que l'ensemble des nombres rationnels est un ensemble infini dénombrable (voir la figure 2). Un tel ensemble est-il négligeable ? Oui ! Voyons pourquoi. Nous allons d'abord enfermer l'ensemble de tous les points A_i dans une suite d'intervalles de longueur totale 2. Pour cela, nous prendrons l'intervalle $[A_0 - 1/2, A_0 + 1/2]$ qui contient A_0 , puis $[A_1 - 1/4, A_1 + 1/4]$ qui contient A_1 , puis $[A_2 - 1/8, A_2 + 1/8]$ qui contient A_2 , etc. La longueur du premier intervalle est 1, la longueur du second est $1/2$, la longueur du troisième est $1/4$, etc. Au total, la longueur cumulée de tous les intervalles qui enferment les A_i est donc $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ somme infinie qui vaut exactement 2. Pour nous persuader que $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$, nous calculons : $1 + 1/2 = 2 - 1/2$; $1 + 1/2 + 1/4 = 2 - 1/4$; $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2 - 1/8$, etc. L'écart avec 2 diminue de plus en plus ; à l'infini, il est nul.

Il est donc possible d'enfermer tout l'ensemble infini des A_i dans une suite d'intervalles de longueur totale 2. Si nous réduisons maintenant la longueur de tous les intervalles d'un facteur 100 avec les points A_i toujours au centre de chacun, la longueur cumulée des intervalles est 100 fois plus petite que précédemment, c'est-à-dire $2/100 = 1/50$. Le procédé de rétrécissement est général, et nous pouvons donc construire une suite d'intervalles qui enfermera tous les A_i et dont la somme des longueurs sera $1/500$, ou $1/500\,000$, ou n'importe quel nombre aussi petit que nous le souhaitons. Cela signifie exactement que l'ensemble infini des A_i est négligeable.

Ce n'est pas troublant si nous pensons par exemple à $A_i = i$, car cela signifie que l'ensemble des nombres entiers est une partie négligeable des nombres réels, ce que notre intuition nous suggérerait déjà. En revanche, le résultat est beaucoup plus troublant quand A_i est l'ensemble des nombres rationnels.

Alors que les nombres rationnels sont partout en nombre infini (entre deux nombres réels, il y a toujours une infinité de nombres rationnels, voir la figure 2b), il est possible de les enfermer tous dans une suite d'intervalles dont la longueur totale est $1/1\,000$. Cela semble paradoxal : l'ensemble des nombres rationnels, quoique infini et partout dense (au voisinage d'un nombre réel, il y a un nombre

2. INFINI DÉNOMBRABLE ET PARTOUT DENSE

(a) L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable (c'est-à-dire peut être mis en correspondance terme à terme avec l'ensemble des entiers).

On prend les fractions irréductibles dont la somme du numérateur et du dénominateur fait 2. Il n'y a que $1/1$, on l'associe à l'entier 0. On prend ensuite toutes les fractions irréductibles dont la somme du numérateur et du dénominateur fait 3. Il y a $2/1$ et $1/2$. On les associe à 1 et 2. Etc.

1/1	2/1	1/2	3/1	1/3	4/1	3/2	2/3	1/4
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Dans cette liste, tout nombre rationnel positif apparaît. Les nombres rationnels constituent un ensemble infini dénombrable.

En revanche, Cantor a découvert que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable : c'est un infini plus gros. Il est impossible de numéroté les réels avec les entiers, comme nous venons de le faire pour les rationnels.

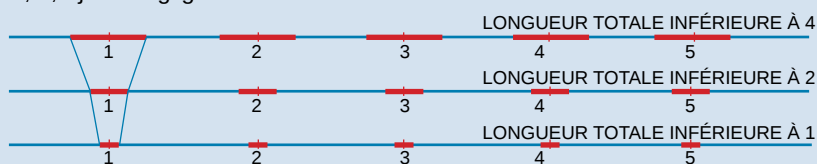
(b) L'ensemble des nombres rationnels est partout dense dans $\mathbb{R}$.

Entre deux nombres réels a, b quelconques, il y a toujours un nombre rationnel. En effet, si a et b sont différents, leurs développements décimaux sont différents à partir d'un certain chiffre, par exemple : $a = 0,183466345\dots$, $b = 0,183472128\dots$. Le rationnel $0,18347 = 18347/100\,000$ est entre a et b .

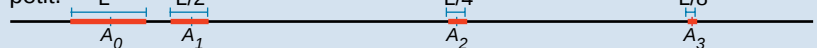
Entre deux nombres réels différents, il y a une infinité de nombres rationnels ; ici, on pourrait prendre $0,18347$; $0,183472$; $0,1834721$; $0,183472128$.

3. ENSEMBLES NÉGLIGEABLES

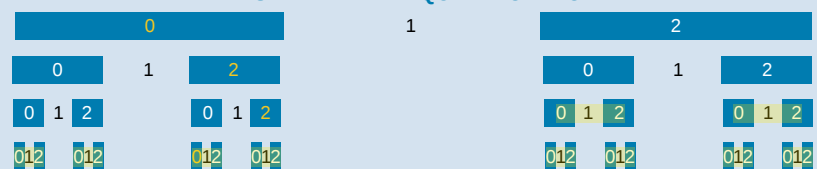
Un ensemble est négligeable si on peut le recouvrir avec des intervalles dont la longueur totale est aussi petite qu'on le veut. Ainsi, l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est négligeable.



L'ensemble Q des nombres rationnels est négligeable, car, en utilisant des intervalles de longueur $L/2, L/4, L/8$, etc., on peut enfermer tous les nombres rationnels dans un intervalle de longueur L choisi arbitrairement petit.



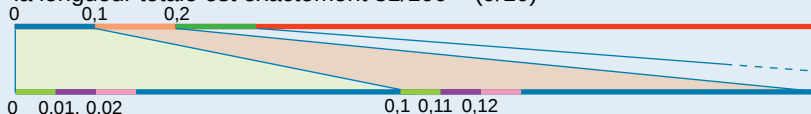
4. ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR



L'ensemble triadique de Cantor s'obtient en partant de l'intervalle $[0, 1]$ auquel on enlève le tiers médian. On enlève à nouveau le tiers médian à chacun des deux intervalles qui restaient, puis on recommence indéfiniment. Ce qui reste à l'infini est non dénombrable et négligeable. L'ensemble de Cantor est l'ensemble de nombres dont le développement en base 3 ne comporte que des 0 et des 2, comme : $0,0220020202200\dots$ (le tiers médian enlevé à la première étape correspond aux nombres dont le premier chiffre est un 1 ; les tiers enlevés à la seconde étape correspondent aux nombres dont le second chiffre est un 1 ; etc.). En associant à ce nombre de l'ensemble triadique de Cantor le nombre réel dont l'écriture en base 2 est $0,0110010101100\dots$ (on a remplacé les 2 par des 1), on définit une correspondance élément par élément entre les réels compris entre 0 et 1 et l'ensemble de Cantor. Ainsi l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable, mais il est négligeable : à l'étape n de sa construction, il peut être enfermé dans un ensemble d'intervalles de longueur totale $(2/3)^n$, quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

5. UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE BOREL

Les nombres qui ne sont pas univers forment une partie négligeable. Montrons d'abord que les nombres réels entre 0 et 1 qui n'ont pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Tous les nombres dont le premier chiffre après la virgule n'est pas "0" constituent exactement l'intervalle $[1/10, 1]$, de longueur totale $9/10$. De la même façon, en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en 100 intervalles de longueur $1/100$ correspondant aux nombres commençant par 0,00 0,01 0,02 ... 0,99, on voit que les nombres qui n'ont de 0 ni en première position ni en seconde position constituent un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est exactement $81/100 = (9/10)^2$



De la même façon, en découpant en petits intervalles, on voit que les nombres n'ayant de "0" dans aucune des positions $1, 2 \dots m$, après la virgule, constituent des intervalles dont la longueur totale est $(9/10)^m$. Cela montre que les nombres entre 0 et 1 n'ayant pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Il en va de même pour les nombres n'ayant pas de "1", etc., ou n'ayant pas la séquence "123" ou "1998", etc. (utiliser le même raisonnement avec la base 100, 1 000 etc., avec $x, 10x, 100x$, etc.). Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables l'est aussi, on voit que les nombres qui ne sont pas univers constituent un ensemble négligeable.

rationnel aussi proche qu'on le désire) serait négligeable ! Dur à avaler !

L'explication de cette apparente difficulté n'est-elle pas que la notion mathématique d'ensemble négligeable est mal formulée et qu'on peut démontrer de n'importe ensemble qu'il est négligeable ?

Non. Il existe des ensembles qui ne sont pas négligeables, par exemple l'intervalle $[-1, +1]$ (ou n'importe quel intervalle $[a, b]$ avec a inférieur à b). Si vous recouvrez les points de $[-1, +1]$ par une suite d'intervalles, comme nous l'avons fait pour l'ensemble des A_n , alors vous

découvrirez toujours que la longueur cumulée des intervalles utilisés dépasse 2 : l'intervalle $[-1, +1]$ n'est pas négligeable.

Plus on l'étudie, plus on l'aime ! La définition mathématique d'ensemble négligeable formalise notre notion intuitive d'ensemble de peu d'importance. La situation est caractéristique d'un progrès scientifique : notre intuition est confirmée sur les ensembles finis (ces ensembles sont négligeables) et sur l'ensemble constitué par l'intervalle $[-1, +1]$ (cet ensemble n'est pas négligeable). Appliquée à d'autres ensembles (comme celui

des rationnels), la conclusion étonne dans un premier temps, mais n'amène aucune véritable difficulté.

L'adoption de la définition formelle d'ensembles négligeables est maintenant universelle et ne choque plus. Les fonctions continues, mais n'ayant de dérivée en aucun point (qui résultent aussi des progrès de notre compréhension du continu), contredisaient aussi nos intuitions initiales, et pourtant elles ont perdu tout pouvoir scandaleux aujourd'hui.

L'étude des ensembles négligeables conduit à quelques propriétés attendues et inattendues. Un sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable. La réunion de deux ensembles négligeables l'est encore. Le complémentaire d'un ensemble négligeable ne l'est jamais et est partout dense ; ce dernier résultat correspond à l'idée naturelle que, si l'on enlève un ensemble négligeable à l'ensemble des réels, on obtient quelque chose qui est presque tout. Plus étonnante est la propriété que la réunion d'une infinité numérotée $E_0, E_1, E_2, \dots E_n, \dots$ d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable : nous verrons plus loin qu'elle a des conséquences remarquables.

La notion d'ensemble négligeable ne coïncide pas exactement avec la notion d'ensemble « fini ou infini dénombrable » élaborée à la même époque par Cantor. Le monde des nombres est plus subtil : certains ensembles infinis non dénombrables (donc déjà assez gros) sont négligeables. Le plus célèbre ensemble non dénombrable négligeable est l'ensemble triadique de Cantor, qui est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 peut se faire sans utiliser le 1 (voir la figure 4). Avec le résultat de Borel, nous allons rencontrer bien d'autres ensembles infinis non dénombrables négligeables.

UN NOMBRE EST PRESQUE CERTAINEMENT ÉTONNANT !

Un nombre réel est un nombre normal en base 10 si, dans son développement en base 10 : les 10 chiffres apparaissent en proportion équilibrée (10 pour cent de chaque) ; les 100 paires possibles de chiffres (00, 01, 02, 99) apparaissent aussi en proportion équilibrée (chacune apparaît avec la fréquence de 1 pour cent) ; les 1 000 triplets de chiffres (000, 001, 999) apparaissent en proportion équilibrée (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Un résultat, démontré par Émile Borel en 1909, nous conduit au bord du paradoxe : l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas normaux en base 10 est négligeable (quoique aussi non dénombrable).

6. LE NOMBRE DE CHAMPERNOWNE EN DIVERSES BASES

SUR 1 000 CHIFFRES

BASE 2 : CH = 0,00011111100110101110110011011...

NOMBRE DE 0 : 499

NOMBRE DE 1 : 499

BASE 3 : CH = 0,0100222222222222121022021000022...

NOMBRE DE 0 : 339

NOMBRE DE 1 : 326

NOMBRE DE 2 : 335

BASE 4 : CH = 0,0133212231310313222020333220013001222120332...

NOMBRE DE 0 : 246

NOMBRE DE 1 : 247

NOMBRE DE 2 : 261

NOMBRE DE 3 : 246

BASE 5 : CH = 0,0302040012323112114114102121314414423002412...

NOMBRE DE 0 : 217

NOMBRE DE 1 : 204

NOMBRE DE 2 : 183

NOMBRE DE 3 : 192

NOMBRE DE 4 : 204

BASE 10 : CH = 0,123456789101112131415...

0 : 66

1 : 177

2 : 177

3 : 148

4 : 77

5 : 77

6 : 77

7 : 67

8 : 67

9 : 67

Le nombre de Champernowne, constitué par la suite des entiers, est "par construction" normal en base 10 et, selon Borel, il est presque certainement normal dans toutes les bases. On le vérifie sur les fréquences en base 1, 2, 3, 4, 5 et 10 où, bien que prouvée, l'égalisation est moins apparente.