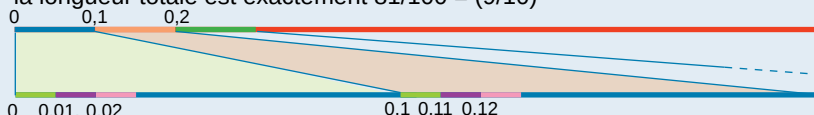


### 5. UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE BOREL

Les nombres qui ne sont pas univers forment une partie négligeable. Montrons d'abord que les nombres réels entre 0 et 1 qui n'ont pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Tous les nombres dont le premier chiffre après la virgule n'est pas "0" constituent exactement l'intervalle  $[1/10, 1]$ , de longueur totale  $9/10$ . De la même façon, en découpant l'intervalle  $[0, 1]$  en 100 intervalles de longueur  $1/100$  correspondant aux nombres commençant par 0,00 0,01 0,02 ... 0,99, on voit que les nombres qui n'ont de 0 ni en première position ni en seconde position constituent un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est exactement  $81/100 = (9/10)^2$



De la même façon, en découpant en petits intervalles, on voit que les nombres n'ayant de "0" dans aucune des positions  $1, 2, \dots, m$ , après la virgule, constituent des intervalles dont la longueur totale est  $(9/10)^m$ . Cela montre que les nombres entre 0 et 1 n'ayant pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Il en va de même pour les nombres n'ayant pas de "1", etc., ou n'ayant pas la séquence "123" ou "1998", etc. (utiliser le même raisonnement avec la base 100, 1 000 etc., avec  $x, 10x, 100x$ , etc.). Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables l'est aussi, on voit que les nombres qui ne sont pas univers constituent un ensemble négligeable.

rationnel aussi proche qu'on le désire) serait négligeable ! Dur à avaler !

L'explication de cette apparente difficulté n'est-elle pas que la notion mathématique d'ensemble négligeable est mal formulée et qu'on peut démontrer de n'importe ensemble qu'il est négligeable ?

Non. Il existe des ensembles qui ne sont pas négligeables, par exemple l'intervalle  $[-1, +1]$  (ou n'importe quel intervalle  $[a, b]$  avec  $a$  inférieur à  $b$ ). Si vous recouvrez les points de  $[-1, +1]$  par une suite d'intervalles, comme nous l'avons fait pour l'ensemble des  $A_n$ , alors vous

découvrirez toujours que la longueur cumulée des intervalles utilisés dépasse 2 : l'intervalle  $[-1, +1]$  n'est pas négligeable.

Plus on l'étudie, plus on l'aime ! La définition mathématique d'ensemble négligeable formalise notre notion intuitive d'ensemble de peu d'importance. La situation est caractéristique d'un progrès scientifique : notre intuition est confirmée sur les ensembles finis (ces ensembles sont négligeables) et sur l'ensemble constitué par l'intervalle  $[-1, +1]$  (cet ensemble n'est pas négligeable). Appliquée à d'autres ensembles (comme celui

des rationnels), la conclusion étonne dans un premier temps, mais n'amène aucune véritable difficulté.

L'adoption de la définition formelle d'ensembles négligeables est maintenant universelle et ne choque plus. Les fonctions continues, mais n'ayant de dérivée en aucun point (qui résultent aussi des progrès de notre compréhension du continu), contredisaient aussi nos intuitions initiales, et pourtant elles ont perdu tout pouvoir scandaleux aujourd'hui.

L'étude des ensembles négligeables conduit à quelques propriétés attendues et inattendues. Un sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable. La réunion de deux ensembles négligeables l'est encore. Le complémentaire d'un ensemble négligeable ne l'est jamais et est partout dense ; ce dernier résultat correspond à l'idée naturelle que, si l'on enlève un ensemble négligeable à l'ensemble des réels, on obtient quelque chose qui est presque tout. Plus étonnante est la propriété que la réunion d'une infinité numérotée  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable : nous verrons plus loin qu'elle a des conséquences remarquables.

La notion d'ensemble négligeable ne coïncide pas exactement avec la notion d'ensemble « fini ou infini dénombrable » élaborée à la même époque par Cantor. Le monde des nombres est plus subtil : certains ensembles infinis non dénombrables (donc déjà assez gros) sont négligeables. Le plus célèbre ensemble non dénombrable négligeable est l'ensemble triadique de Cantor, qui est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 peut se faire sans utiliser le 1 (voir la figure 4). Avec le résultat de Borel, nous allons rencontrer bien d'autres ensembles infinis non dénombrables négligeables.

### UN NOMBRE EST PRESQUE CERTAINEMENT ÉTONNANT !

Un nombre réel est un nombre normal en base 10 si, dans son développement en base 10 : les 10 chiffres apparaissent en proportion équilibrée (10 pour cent de chaque) ; les 100 paires possibles de chiffres (00, 01, 02, 99) apparaissent aussi en proportion équilibrée (chacune apparaît avec la fréquence de 1 pour cent) ; les 1 000 triplets de chiffres (000, 001, 999) apparaissent en proportion équilibrée (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Un résultat, démontré par Émile Borel en 1909, nous conduit au bord du paradoxe : l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas normaux en base 10 est négligeable (quoique aussi non dénombrable).

### 6. LE NOMBRE DE CHAMPERNOWNE EN DIVERSES BASES

SUR 1 000 CHIFFRES

BASE 2 : CH = 0,00011111100110101110110011011...

NOMBRE DE 0 : 499

NOMBRE DE 1 : 499

BASE 3 : CH = 0,01002222222222222121022021000022...

NOMBRE DE 0 : 339

NOMBRE DE 1 : 326

NOMBRE DE 2 : 335

BASE 4 : CH = 0,0133212231310313222020333220013001222120332...

NOMBRE DE 0 : 246

NOMBRE DE 1 : 247

NOMBRE DE 2 : 261

NOMBRE DE 3 : 246

BASE 5 : CH = 0,0302040012323112114114102121314414423002412...

NOMBRE DE 0 : 217

NOMBRE DE 1 : 204

NOMBRE DE 2 : 183

NOMBRE DE 3 : 192

NOMBRE DE 4 : 204

BASE 10 : CH = 0,123456789101112131415...

0 : 66

1 : 177

2 : 177

3 : 148

4 : 77

5 : 77

6 : 77

7 : 67

8 : 67

9 : 67

Le nombre de Champernowne, constitué par la suite des entiers, est "par construction" normal en base 10 et, selon Borel, il est presque certainement normal dans toutes les bases. On le vérifie sur les fréquences en base 1, 2, 3, 4, 5 et 10 où, bien que prouvée, l'égalisation est moins apparente.