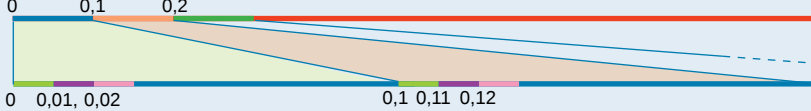


5. UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE BOREL

Les nombres qui ne sont pas univers forment une partie négligeable. Montrons d'abord que les nombres réels entre 0 et 1 qui n'ont pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Tous les nombres dont le premier chiffre après la virgule n'est pas "0" constituent exactement l'intervalle $[1/10, 1]$, de longueur totale $9/10$. De la même façon, en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en 100 intervalles de longueur $1/100$ correspondant aux nombres commençant par 0,00 0,01 0,02 . . . 0,99, on voit que les nombres qui n'ont de 0 ni en première position ni en seconde position constituent un ensemble d'intervalles dont la longueur totale est exactement $81/100 = (9/10)^2$



De la même façon, en découpant en petits intervalles, on voit que les nombres n'ayant de "0" dans aucune des positions 1, 2 . . . m , après la virgule, constituent des intervalles dont la longueur totale est $(9/10)^m$. Cela montre que les nombres entre 0 et 1 n'ayant pas de "0" dans leur développement décimal forment un ensemble négligeable. Il en va de même pour les nombres n'ayant pas de "1", etc., ou n'ayant pas la séquence "123" ou "1998", etc. (utiliser le même raisonnement avec la base 100, 1 000 etc., avec x , $10x$, $100x$, etc.). Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables l'est aussi, on voit que les nombres qui ne sont pas univers constituent un ensemble négligeable.

rationnel aussi proche qu'on le désire)
serait négligeable ! Dur à avaler !

L'explication de cette apparente difficulté n'est-elle pas que la notion mathématique d'ensemble négligeable est mal formulée et qu'on peut démontrer de n'importe ensemble qu'il est négligeable?

Non. Il existe des ensembles qui ne sont pas négligeables, par exemple l'intervalle $[-1, +1]$ (ou n'importe quel intervalle $[a, b]$ avec a inférieur à b). Si vous recouvrez les points de $[-1, +1]$ par une suite d'intervalles, comme nous l'avons fait pour l'ensemble des A_p , alors vous

découvrirez toujours que la longueur cumulée des intervalles utilisés dépasse 2 : l'intervalle $[-1, +1]$ n'est pas négligeable.

Plus on l'étudie, plus on l'aime! La définition mathématique d'ensemble négligeable formalise notre notion intuitive d'ensemble de peu d'importance. La situation est caractéristique d'un progrès scientifique : notre intuition est confirmée sur les ensembles finis (ces ensembles sont négligeables) et sur l'ensemble constitué par l'intervalle $[-1, +1]$ (cet ensemble n'est pas négligeable). Appliquée à d'autres ensembles (comme celui

des rationnels), la conclusion étonne dans un premier temps, mais n'amène aucune véritable difficulté.

L'adoption de la définition formelle d'ensembles négligeables est maintenant universelle et ne choque plus. Les fonctions continues, mais n'ayant de dérivée en aucun point (qui résultent aussi des progrès de notre compréhension du continu), contredisaient aussi nos intuitions initiales, et pourtant elles ont perdu tout pouvoir scandaleux aujourd'hui.

L'étude des ensembles négligeables conduit à quelques propriétés attendues et inattendues. Un sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable. La réunion de deux ensembles négligeables l'est encore. Le complémentaire d'un ensemble négligeable ne l'est jamais et est partout dense ; ce dernier résultat correspond à l'idée naturelle que, si l'on enlève un ensemble négligeable à l'ensemble des réels, on obtient quelque chose qui est presque tout. Plus étonnante est la propriété que la réunion d'une infinité numérotée $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable : nous verrons plus loin qu'elle a des conséquences remarquables.

La notion d'ensemble négligeable ne coïncide pas exactement avec la notion d'ensemble «fini ou infini dénombrable» élaborée à la même époque par Cantor. Le monde des nombres est plus subtil : certains ensembles infinis non dénombrables (donc déjà assez gros) sont négligeables. Le plus célèbre ensemble non dénombrable négligeable est l'ensemble triadique de Cantor, qui est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 peut se faire sans utiliser le 1 (*voir la figure 4*). Avec le résultat de Borel, nous allons rencontrer bien d'autres ensembles infinis non dénombrables négligeables.

6. LE NOMBRE DE CHAMPERNOWNE EN DIVERSES BASES

SUR 1 000 CHIFFRES

BASE 2 : CH = 0,0001111110011010110111010011011...

NOMBRE DE 0 : 499	NOMBRE DE 1 : 499
-------------------	-------------------

BASE 3 : CH = 0,0100222222222222121022021000022...

NOMBRE DE 0 : 339 NOMBRE DE 1 : 326 NOMBRE DE 2 : 335

BASE 4 : CH = 0,0133212231310313222020333220013001222120332...

NOMBRE DE 0 : 246	NOMBRE DE 1 : 247	NOMBRE DE 2 : 261	NOMBRE DE 3 : 246
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

BASE 5 : CH = 0,0302040012323112114114102121314414423002412. . .

NOMBRE DE 0 : 217	NOMBRE DE 1 : 204	NOMBRE DE 2 : 183	NOMBRE DE 3 : 192	NOMBRE DE 4 : 204
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

BASE 10 : CH = 0,123456789101112131415...

0 : 66	1 : 177	2 : 177	3 : 148	4 : 77	5 : 77	6 : 77	7 : 67	8 : 67	9 : 67
--------	---------	---------	---------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Le nombre de Champernowne, constitué par la suite des entiers, est "par construction" normal en base 10 et, selon Borel, il est presque certainement normal dans toutes les bases. On le vérifie sur les fréquences en base 1, 2, 3, 4, 5 et 10 où, bien que prouvée, l'égalisation est moins apparente.

UN NOMBRE EST PRESQUE CERTAINEMENT ÉTONNANT!

Un nombre réel est un nombre normal en base 10 si, dans son développement en base 10 : les 10 chiffres apparaissent en proportion équilibrée (10 pour cent de chaque) ; les 100 paires possibles de chiffres (00, 01, 02, 99) apparaissent aussi en proportion équilibrée (chacune apparaît avec la fréquence de 1 pour cent) ; les 1 000 triplets de chiffres (000, 001, 999) apparaissent en proportion équilibrée (chacun apparaît avec une fréquence de 0,1 pour cent) ; etc.

Un résultat, démontré par Émile Borel en 1909, nous conduit au bord du paradoxe : l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas normaux en base 10 est négligeable (quoique aussi non dénombrable).

Assez naturellement, on dit d'une propriété qui est vérifiée pour tout nombre réel, sauf pour ceux appartenant à un ensemble négligeable, qu'elle est *presque certaine*, et donc que le résultat de Borel peut s'exprimer en huit mots : être normal en base 10 est presque certain.

Une interprétation probabiliste du résultat de Borel est possible : en tirant au hasard les décimales d'un nombre réel avec un système équitable (qui ne favorise aucun chiffre), on obtient un nombre normal en base 10, avec une probabilité de 100 pour cent. Les versions probabilistes ou topologiques du résultat de Borel sont profondément surprenantes : être normal est une propriété tellement forte (pour être normal, il faut se soumettre simultanément à une infinité de contraintes) qu'on reste interloqué du résultat de Borel : tous les nombres réels, sauf une partie négligeable d'entre eux, satisfont cette infinité de contraintes que le hasard produit avec certitude ! La version topologique possède l'avantage de ne pas faire appel à l'idée irréaliste d'une série infinie de tirages au sort.

Il résulte du théorème de Borel que la propriété être équiréparti en base 10 (avoir autant de 0 que de 1, que de 9 dans son développement décimal) est presque certaine. De même encore, être un nombre-univers en base 10 (posséder un développement décimal qui contient toutes les séquences finies possibles de chiffres) est une propriété presque certaine.

Quand on change de base de numération, les résultats précédents restent vrais, et donc «être normal en base 2», «être normal en base 3», etc., sont toutes des propriétés presque certaines. Le fait évoqué plus haut qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore un ensemble négligeable se traduit en la propriété que la conjonction d'une infinité dénombrable de propriétés presque certaines l'est aussi. Les propriétés «être normal dans toutes les bases de numération simultanément», «être univers dans toutes les bases simultanément» ou «être équiréparti dans toutes les bases simultanément» sont donc presque certaines.

Mis sous cette forme ultime, le résultat de Borel dépasse les bornes du raisonnable. En effet, alors qu'on connaît des nombres normaux en base 10 comme le nombre de Champernowne 0,123456789101112... (voir *Champernowne et quelques autres*, par Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science*, décembre 1998), on ne connaît de manière explicite aucun nombre normal en toute base.

PRESQUE PARTOUT, MAIS INTROUVABLE !

Si ce n'est pas un paradoxe, cela y ressemble : bien qu'un nombre soit presque certainement normal en toute base simultanément, on ne sait définir de manière explicite aucun nombre dont on puisse prouver qu'il est normal en toute base : les nombres normaux en toute base sont tout (à un ensemble négligeable près), mais on n'en a aucun !

Le seul début d'exception est fourni par la théorie algorithmique de l'information, qui permet de définir un nombre nor-

mal en toute base (le nombre Oméga de Chaitin), mais dont il est impossible de connaître les décimales. Ce nombre n'est pas donné par une méthode qui en permette le calcul et ne peut donc pas satisfaire notre désir de connaître vraiment un nombre normal en toute base (on peut d'ailleurs s'interroger sur la réalité de nombres, comme le nombre Oméga, mathématiquement bien définis, mais dont les décimales sont par principe incalculables).

Le mathématicien, en étudiant sur un plan abstrait l'existence des nombres normaux, prouve de façon parfaitement rigoureuse que les nombres normaux dans toute base sont infiniment majoritaires ; pourtant, le mathématicien ne réussit pas même à en expliciter un seul !

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

On pourrait en conséquence avoir des doutes concernant le sens de ce que démontrent les mathématiciens. D'où l'idée de tester expérimentalement, pour des nombres particuliers, ce que le résultat de Borel énonce sur un plan général. Si nous prenons un nombre au hasard sans tricher, c'est-à-dire sans en fixer nous-mêmes les chiffres (directement ou indirectement) par une règle artificielle, comme nous le faisons quand nous définissons le nombre de Champernowne, nous devrions tomber sur un nombre normal en base 10, et en n'importe quelle base. C'est effectivement ce que nous constatons, par exemple avec $\sqrt{2}$, avec π , avec e , etc. Tous ces nombres sont expérimentalement des nombres normaux en toute base.

Le théorème de Borel suggère aussi qu'en prenant un nombre artificiel en base 10, comme le nombre de Champernowne et en l'écrivant en base 2, ou 3, etc., on trouvera un nombre normal en base 2 ou 3, etc. De même, en prenant un nombre artificiel non normal en base 10 (comme le nombre de Liouville $L = 0,1100010$, des 1 en position $1!$, $2!$, $3!$, etc.), il sera normal une fois écrit en base 2, 3, etc. Sauf exception conçue exprès, quelle que soit la base B choisie et quel que soit le nombre x choisi, on s'attend à ce que x soit normal en base B .

Il faut être attentif aux exceptions, car certaines relations parfaitement connues font qu'un nombre défini pour n'être pas normal en une certaine base ne le sera pas dans une autre. Wolfgang Schmidt a par exemple montré que tout nombre non normal en base n ne le sera pas en base m s'il existe i et j vérifiant que $n^i = m^j$. À condition de tenir compte de ces exceptions faciles à contrôler, nous devons nous attendre à ne rencontrer que des nombres normaux en toute base. Cela nous conduit à formuler le principe abstrait suivant, que je propose de dénommer l'heuristique de Borel :

«Quand on considère un nombre et qu'on l'écrit en une base B , à moins qu'il n'ait été défini par une règle qui en fixe les chiffres en cette base-là, et qui