

Assez naturellement, on dit d'une propriété qui est vérifiée pour tout nombre réel, sauf pour ceux appartenant à un ensemble négligeable, qu'elle est *presque certaine*, et donc que le résultat de Borel peut s'exprimer en huit mots : être normal en base 10 est presque certain.

Une interprétation probabiliste du résultat de Borel est possible : en tirant au hasard les décimales d'un nombre réel avec un système équitable (qui ne favorise aucun chiffre), on obtient un nombre normal en base 10, avec une probabilité de 100 pour cent. Les versions probabilistes ou topologiques du résultat de Borel sont profondément surprenantes : être normal est une propriété tellement forte (pour être normal, il faut se soumettre simultanément à une infinité de contraintes) qu'on reste interloqué du résultat de Borel : tous les nombres réels, sauf une partie négligeable d'entre eux, satisfont cette infinité de contraintes que le hasard produit avec certitude ! La version topologique possède l'avantage de ne pas faire appel à l'idée irréaliste d'une série infinie de tirages au sort.

Il résulte du théorème de Borel que la propriété être équiréparti en base 10 (avoir autant de 0 que de 1, que de 9 dans son développement décimal) est presque certaine. De même encore, être un nombre-univers en base 10 (posséder un développement décimal qui contient toutes les séquences finies possibles de chiffres) est une propriété presque certaine.

Quand on change de base de numération, les résultats précédents restent vrais, et donc «être normal en base 2», «être normal en base 3», etc., sont toutes des propriétés presque certaines. Le fait évoqué plus haut qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore un ensemble négligeable se traduit en la propriété que la conjonction d'une infinité dénombrable de propriétés presque certaines l'est aussi. Les propriétés «être normal dans toutes les bases de numération simultanément», «être univers dans toutes les bases simultanément» ou «être équiréparti dans toutes les bases simultanément» sont donc presque certaines.

Mis sous cette forme ultime, le résultat de Borel dépasse les bornes du raisonnable. En effet, alors qu'on connaît des nombres normaux en base 10 comme le nombre de Champernowne 0,123456789101112... (voir *Champernowne et quelques autres*, par Jean-Paul Delahaye, *Pour la Science*, décembre 1998), on ne connaît de manière explicite aucun nombre normal en toute base.

PRESQUE PARTOUT, MAIS INTROUVABLE !

Si ce n'est pas un paradoxe, cela y ressemble : bien qu'un nombre soit presque certainement normal en toute base simultanément, on ne sait définir de manière explicite aucun nombre dont on puisse prouver qu'il est normal en toute base : les nombres normaux en toute base sont tout (à un ensemble négligeable près), mais on n'en a aucun !

Le seul début d'exception est fourni par la théorie algorithmique de l'information, qui permet de définir un nombre nor-

mal en toute base (le nombre Oméga de Chaitin), mais dont il est impossible de connaître les décimales. Ce nombre n'est pas donné par une méthode qui en permette le calcul et ne peut donc pas satisfaire notre désir de connaître vraiment un nombre normal en toute base (on peut d'ailleurs s'interroger sur la réalité de nombres, comme le nombre Oméga, mathématiquement bien définis, mais dont les décimales sont par principe incalculables).

Le mathématicien, en étudiant sur un plan abstrait l'existence des nombres normaux, prouve de façon parfaitement rigoureuse que les nombres normaux dans toute base sont infiniment majoritaires ; pourtant, le mathématicien ne réussit pas même à en expliciter un seul !

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

On pourrait en conséquence avoir des doutes concernant le sens de ce que démontrent les mathématiciens. D'où l'idée de tester expérimentalement, pour des nombres particuliers, ce que le résultat de Borel énonce sur un plan général. Si nous prenons un nombre au hasard sans tricher, c'est-à-dire sans en fixer nous-mêmes les chiffres (directement ou indirectement) par une règle artificielle, comme nous le faisons quand nous définissons le nombre de Champernowne, nous devrions tomber sur un nombre normal en base 10, et en n'importe quelle base. C'est effectivement ce que nous constatons, par exemple avec $\sqrt{2}$, avec π , avec e , etc. Tous ces nombres sont expérimentalement des nombres normaux en toute base.

Le théorème de Borel suggère aussi qu'en prenant un nombre artificiel en base 10, comme le nombre de Champernowne et en l'écrivant en base 2, ou 3, etc., on trouvera un nombre normal en base 2 ou 3, etc. De même, en prenant un nombre artificiel non normal en base 10 (comme le nombre de Liouville $L = 0,1100010$, des 1 en position $1!$, $2!$, $3!$, etc.), il sera normal une fois écrit en base 2, 3, etc. Sauf exception conçue exprès, quelle que soit la base B choisie et quel que soit le nombre x choisi, on s'attend à ce que x soit normal en base B .

Il faut être attentif aux exceptions, car certaines relations parfaitement connues font qu'un nombre défini pour n'être pas normal en une certaine base ne le sera pas dans une autre. Wolfgang Schmidt a par exemple montré que tout nombre non normal en base n ne le sera pas en base m s'il existe i et j vérifiant que $n^i = m^j$. À condition de tenir compte de ces exceptions faciles à contrôler, nous devons nous attendre à ne rencontrer que des nombres normaux en toute base. Cela nous conduit à formuler le principe abstrait suivant, que je propose de dénommer l'heuristique de Borel : «Quand on considère un nombre et qu'on l'écrit en une base B , à moins qu'il n'ait été défini par une règle qui en fixe les chiffres en cette base-là, et qui

en empêche exprès la normalité, on obtiendra toujours un nombre normal en base B (et donc équiréparti en base B, et univers en base B).»

En particulier, tout nombre irrationnel algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) doit être normal en toute base. Toute constante comme π , e , $\log(3)$ doit être normale en toute base. Tout nombre possédant une expression algébrique simple composée avec ces nombres (par exemple, $e + \pi$, $99 \pi / \log(3)$, $\log(\pi)$, etc., doit être normal en toute base.

Le «doit» de la phrase précédente est très étrange, et cette formulation ne peut que déplaire au mathématicien traditionnel. Ceux que je dépeins par «mathématiciens traditionnels» ne tiennent compte que des vérités démontrées. Or l'écart entre ce que donne l'heuristique de Borel et ce que donne la connaissance mathématique (c'est-à-dire ce qui est démontré) est le plus grand possible : personne ne sait RIEN prouver de ce qu'indique l'heuristique de Borel (pourtant vérifiée numériquement à chaque fois qu'on le tente et pourtant démontrée globalement par Borel il y a presque 100 ans).

La figure 6 indique les développements du nombre de Champernowne en diverses bases ; d'autres expérimentations, faites ces dernières années sur des millions de décimales, confirment aussi l'heuristique de Borel. Une étude de S. Pincus et R. Kalman en 1997 fait exception et prétend détecter des différences subtiles entre les décimales des divers nombres irrationnels qui pourraient peut-être agir sur la normalité. Cette étude doit être éclaircie.

Ces mathématiques qui suggèrent des théorèmes généraux que jamais personne n'arrive à prouver dans aucun cas particulier ne sont-elles pas étranges ? Comment corriger cette anomalie des nombres partout présents, mais introuvables ? Comment arranger les mathématiques pour éviter qu'elles n'autorisent des démonstrations globales ne se traduisant jamais en cas précis ?

QUELS REMÈDES ?

Lorsque l'écart est si grand entre, d'une part, ce qu'on voit expérimentalement ou par le raisonnement global et, d'autre part, ce qu'on réussit à prouver en particulier, il est temps d'être inquiet (comme un physicien le serait si on lui présentait une théorie qui prouverait l'existence de particules partout présentes, mais dont il ne verrait jamais aucune preuve manifeste). L'heuristique de Borel ne crée pas de contradiction explicite, mais la situation est rationnellement insatisfaisante et pourrait signaler un défaut majeur de nos conceptions. Si nous réussissons un jour à trouver des nombres dont nous

8. PROPRIÉTÉS "VRAIES ET FAUSSES"

Si une propriété est vérifiée pour tout nombre, sauf ceux appartenant à un ensemble négligeable, elle est presque certaine (ou presque certainement vraie). Si les nombres qui vérifient la propriété constituent un ensemble négligeable, la propriété est presque certainement fausse.

Propriétés "vraies" :

- être équiréparti en base B,
- être univers en base B,
- être normal en base B,
- être équiréparti en toute base,
- être univers en toute base,
- être normal en toute base,

Propriétés "fausses" :

- être rationnel,
- être algébrique,
- ne pas utiliser de "0" dans son développement décimal.
- appartenir à l'ensemble de Cantor,
- avoir une suite de chiffres programmable par algorithme.
- être définissable dans le système mathématique de la théorie des ensembles.

prouvions qu'ils sont normaux en toute base, ce sera parfait. Nous aurons comblé le trou entre propriétés générales et propriétés particulières. Le quasi-paradoxe sera résolu sans que nous ayons rien à changer dans notre conception, et notre inconfort actuel n'aura été que temporaire et sans signification.

L'attente a déjà été longue, et il est devenu légitime de s'interroger sur la nature de ce quasi-paradoxe : n'appelle-t-il pas une réforme dans notre vision des mathématiques ? Le continu du mathématicien n'est pas celui du physicien, car ce dernier n'accorde aucun sens à l'affirmation qu'il y a une infinité non dénombrable d'instantanés dans une seconde. La méfiance implicite du physicien n'est-elle pas justifiée ?

Puisque le continu du mathématicien se fonde sur la théorie des ensembles (car le continu se construit à partir des opérations de la théorie des ensembles prise comme allant de soi), peut-être faut-il renoncer à la théorie des ensembles ou la réformer ? C'est ce point qu'étudient certains logiciens, comme T. E. Forster, de l'Université de Cambridge, qui formule des théories des ensembles avec l'ensemble de tous les ensembles (dans la théorie usuelle de Cantor, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles), ou comme E. Nelson, qui propose une théorie dite non standard (à la base d'une conception des infiniment petits), ou comme J. Barwise, qui défend une théorie des hyper-ensembles (permettant l'étude des paradoxes liés aux autoréférences). D'autres encore proposent de

nouveaux axiomes (par exemple portant sur les grands ensembles) : ces nouveaux axiomes, en augmentant le pouvoir de preuve des mathématiques, permettront peut-être de démontrer ces propriétés de normalité.

À l'opposé de ces voies tentant de rendre plus puissante la théorie des ensembles, d'autres recherches remettent en cause la logique usuelle. Les mathématiciens intuitionnistes et constructivistes espèrent, par des raisonnements plus exigeants, conjurer les quasi-paradoxes de l'existence (comme celui résultant de l'heuristique de Borel) et pour cela refusent par principe qu'une démonstration puisse aboutir à un énoncé d'existence («il existe un objet vérifiant telle propriété») sans qu'elle soit accompagnée d'une méthode de construction de l'objet en question. Leurs méthodes sont malheureusement restrictives et compliquent le développement de l'analyse.

On le voit, les nombres normaux, les nombres-univers, les ensembles négligeables et l'heuristique de Borel conduisent à des interrogations sur la nature profonde des mathématiques. Même si beaucoup de mathématiciens refusent de considérer les solutions alternatives avec sérieux et préfèrent attendre sans changer le monde ensembliste adopté au début du xx^e siècle, rien n'assure qu'ils ont raison et que les difficultés du monde ensembliste classique ne resurgiront pas plus gravement encore à l'occasion d'un autre problème.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lil.fr

E. BOREL, Presque tous les nombres réels sont normaux, Rend. Circ. Mat. Palermo, 27, pp. 247-271, 1909.

J. BARWISE et L. MOSS, Vicious Circles, CSLI Publications, Stanford, Californie, 1996.

J. BORWEIN et P. BORWEIN, Making Sense of Experimental Mathematics, CECM, Simon Fraser University, Canada, 1996.

D. CHAMPERNOWNE, The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten, in J. London Math. Soc. 8. pp. 254-260, 1933.

J.-P. DELAHAYE, Le fascinant nombre π , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

T. FORSTER, Set Theory with Universal Set, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1995.

V. KLEE et S. WAGON, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, n° 11, 1993.

W. SCHMIDT, On Normal Numbers, in Pacific Journal of Mathematics, 10, p. 3, 1960.