

en empêche exprès la normalité, on obtiendra toujours un nombre normal en base B (et donc équiréparti en base B, et univers en base B).»

En particulier, tout nombre irrationnel algébrique (solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers) doit être normal en toute base. Toute constante comme π , e , $\log(3)$ doit être normale en toute base. Tout nombre possédant une expression algébrique simple composée avec ces nombres (par exemple, $e + \pi$, $99\pi/\log(3)$, $\log(\pi)$, etc., doit être normal en toute base.

Le «doit» de la phrase précédente est très étrange, et cette formulation ne peut que déplaire au mathématicien traditionnel. Ceux que je dépeins par «mathématiciens traditionnels» ne tiennent compte que des vérités démontrées. Or l'écart entre ce que donne l'heuristique de Borel et ce que donne la connaissance mathématique (c'est-à-dire ce qui est démontré) est le plus grand possible : personne ne sait RIEN prouver de ce qu'indique l'heuristique de Borel (pourtant vérifiée numériquement à chaque fois qu'on le tente et pourtant démontrée globalement par Borel il y a presque 100 ans).

La figure 6 indique les développements du nombre de Champernowne en diverses bases ; d'autres expérimentations, faites ces dernières années sur des millions de décimales, confirment aussi l'heuristique de Borel. Une étude de S. Pincus et R. Kalman en 1997 fait exception et prétend détecter des différences subtiles entre les décimales des divers nombres irrationnels qui pourraient peut-être agir sur la normalité. Cette étude doit être éclaircie.

Ces mathématiques qui suggèrent des théorèmes généraux que jamais personne n'arrive à prouver dans aucun cas particulier ne sont-elles pas étranges ? Comment corriger cette anomalie des nombres partout présents, mais introuvables ? Comment arranger les mathématiques pour éviter qu'elles n'autorisent des démonstrations globales ne se traduisant jamais en cas précis ?

QUELS REMÈDES ?

Lorsque l'écart est si grand entre, d'une part, ce qu'on voit expérimentalement ou par le raisonnement global et, d'autre part, ce qu'on réussit à prouver en particulier, il est temps d'être inquiet (comme un physicien le serait si on lui présentait une théorie qui prouverait l'existence de particules partout présentes, mais dont il ne verrait jamais aucune preuve manifeste). L'heuristique de Borel ne crée pas de contradiction explicite, mais la situation est rationnellement insatisfaisante et pourrait signaler un défaut majeur de nos conceptions. Si nous réussissons un jour à trouver des nombres dont nous

8. PROPRIÉTÉS "VRAIES ET FAUSSES"

Si une propriété est vérifiée pour tout nombre, sauf ceux appartenant à un ensemble négligeable, elle est presque certaine (ou presque certainement vraie). Si les nombres qui vérifient la propriété constituent un ensemble négligeable, la propriété est presque certainement fausse.

Propriétés "vraies" :

- être équiréparti en base B,
- être univers en base B,
- être normal en base B,
- être équiréparti en toute base,
- être univers en toute base,
- être normal en toute base,

Propriétés "fausses" :

- être rationnel,
- être algébrique,
- ne pas utiliser de "0" dans son développement décimal.
- appartenir à l'ensemble de Cantor,
- avoir une suite de chiffres programmable par algorithme.
- être définissable dans le système mathématique de la théorie des ensembles.

prouvions qu'ils sont normaux en toute base, ce sera parfait. Nous aurons comblé le trou entre propriétés générales et propriétés particulières. Le quasi-paradoxe sera résolu sans que nous ayons rien à changer dans notre conception, et notre inconfort actuel n'aura été que temporaire et sans signification.

L'attente a déjà été longue, et il est devenu légitime de s'interroger sur la nature de ce quasi-paradoxe : n'appelle-t-il pas une réforme dans notre vision des mathématiques ? Le continu du mathématicien n'est pas celui du physicien, car ce dernier n'accorde aucun sens à l'affirmation qu'il y a une infinité non dénombrable d'instants dans une seconde. La méfiance implicite du physicien n'est-elle pas justifiée ?

Puisque le continu du mathématicien se fonde sur la théorie des ensembles (car le continu se construit à partir des opérations de la théorie des ensembles prise comme allant de soi), peut-être faut-il renoncer à la théorie des ensembles ou la réformer ? C'est ce point qu'étudient certains logiciens, comme T. E. Forster, de l'Université de Cambridge, qui formule des théories des ensembles avec l'ensemble de tous les ensembles (dans la théorie usuelle de Cantor, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles), ou comme E. Nelson, qui propose une théorie dite non standard (à la base d'une conception des infiniment petits), ou comme J. Barwise, qui défend une théorie des hyper-ensembles (permettant l'étude des paradoxes liés aux autoréférences). D'autres encore proposent de

nouveaux axiomes (par exemple portant sur les grands ensembles) : ces nouveaux axiomes, en augmentant le pouvoir de preuve des mathématiques, permettront peut-être de démontrer ces propriétés de normalité.

À l'opposé de ces voies tentant de rendre plus puissante la théorie des ensembles, d'autres recherches remettent en cause la logique usuelle. Les mathématiciens intuitionnistes et constructivistes espèrent, par des raisonnements plus exigeants, conjurer les quasi-paradoxes de l'existence (comme celui résultant de l'heuristique de Borel) et pour cela refusent par principe qu'une démonstration puisse aboutir à un énoncé d'existence («il existe un objet vérifiant telle propriété») sans qu'elle soit accompagnée d'une méthode de construction de l'objet en question. Leurs méthodes sont malheureusement restrictives et compliquent le développement de l'analyse.

On le voit, les nombres normaux, les nombres-univers, les ensembles négligeables et l'heuristique de Borel conduisent à des interrogations sur la nature profonde des mathématiques. Même si beaucoup de mathématiciens refusent de considérer les solutions alternatives avec sérieux et préfèrent attendre sans changer le monde ensembliste adopté au début du xx^e siècle, rien n'assure qu'ils ont raison et que les difficultés du monde ensembliste classique ne resurgiront pas plus gravement encore à l'occasion d'un autre problème.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lil.fr

E. BOREL, *Presque tous les nombres réels sont normaux*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 27, pp. 247-271, 1909.

J. BARWISE et L. MOSS, *Vicious Circles*, CSLI Publications, Stanford, Californie, 1996.

J. BORWEIN et P. BORWEIN, *Making Sense of Experimental Mathematics*, CECM, Simon Fraser University, Canada, 1996.

D. CHAMPERNOWNE, *The Construction of Decimal Normal in the Scale of Ten*, in J. London Math. Soc. 8. pp. 254-260, 1933.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π* , Éditions Pour La Science-Belin, 1997.

T. FORSTER, *Set Theory with Universal Set*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1995.

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, n° 11, 1993.

W. SCHMIDT, *On Normal Numbers*, in Pacific Journal of Mathematics, 10, p. 3, 1960.

Photogram-Stone Images



Bulles de savants

IAN STEWART

À propos de films où les mousses coincent la bulle.

Première devinette : quel solide possède 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces, chacune ayant 5 côtés ? Le dodécaèdre. Seconde devinette : quel solide a 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces, chacune de 5,103 côtés ? Vous pensez peut-être à un fractal tarabiscoté ? Ce n'est pas la bonne piste : le solide est familier. Recherchez-le en buvant un verre de bière, en prenant une douche ou en faisant la vaisselle.

Même avec ces indications, vous aurez du mal à deviner, car la question était biaisée : le solide en question n'a les propriétés annoncées qu'en moyenne et, de surcroît, ce n'est pas un vrai solide. C'est la mousse, qui est composée de myriades de bulles, lesquelles sont de minuscules polyèdres irréguliers. En moyenne, les bulles d'une mousse ont 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces. Une bulle moyenne ressemblerait à un «tridéca-et-des-poussières-èdre».

Les mathématiques des bulles et de la mousse sont nées dans les années 1830, bien après l'invention du savon, lorsque le physicien belge Joseph Plateau plongea des cadres en fils de fer dans de l'eau savonneuse. Malgré 170 années de recherches, on ne comprend pas plusieurs des phénomènes observés par Plateau.

Par exemple, personne n'a démontré la conjecture de la double bulle, qui

stipule que la forme adoptée par deux bulles adjacentes est composée de trois surfaces sphériques (voir la figure 3). En 1995, Joel Hass, de l'Université de Californie, et Roger Schlafly, de la Société *Real Software*, ont démontré cette conjecture pour deux bulles de même volume.

LES SURFACES MINIMALES

En 1829, Plateau se brûla les yeux alors qu'il observait le Soleil à l'œil nu pendant 25 secondes. Il en resta aveugle, mais continua de contribuer toute sa vie à ce domaine des mathématiques éminemment visuel : la géométrie dans l'espace.

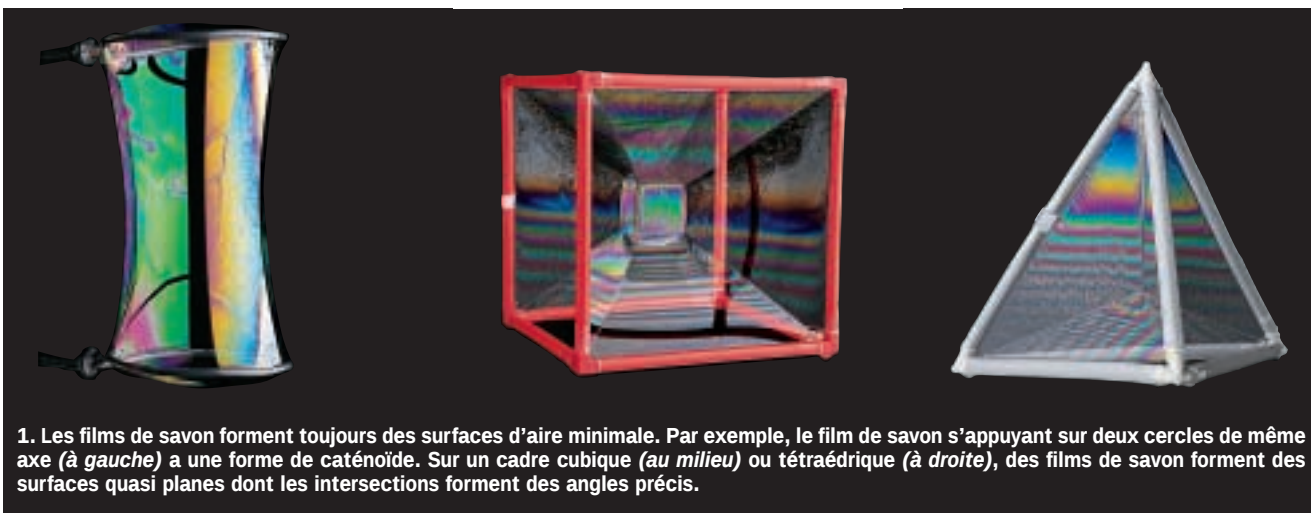
Les bulles et les films de savon appartiennent à la famille mathématique très étudiée des surfaces minimales : des surfaces répondant à certaines contraintes et dont l'aire est minimale. Cette minimisation de l'aire découle du principe universel de minimisation de l'énergie. Puisque l'énergie de tension d'un film de savon est proportionnelle à sa surface, l'énergie des bulles est minimale quand l'aire l'est.

Un film de savon à l'équilibre est comparable à une surface mathématique d'épaisseur nulle : son épaisseur, de l'ordre de un milliardième de mètre, est négligeable. Sans aucune contrainte, une bulle de savon évolue jusqu'à ce que son

aire soit nulle, mais on leur impose généralement de contenir un volume précis ou d'avoir leur frontière sur une certaine surface ou sur une certaine courbe. Par exemple, une bulle qui se pose sur une table est une demi-sphère : c'est la plus petite surface entourant un volume donné (l'air emprisonné dans la bulle) et ayant sa frontière sur un plan.

Plateau s'est intéressé aux surfaces dont la frontière est une courbe imposée. Il matérialisait les courbes par un fil ou par plusieurs fils soutenus par un cadre. Par exemple, quelle est la surface minimale dont la frontière est formée de deux cercles parallèles, de même rayon ? Le mathématicien suisse Leonhard Euler, le «prince des mathématiques», démontra que la véritable surface minimale ayant une telle frontière n'est pas un cylindre, mais un caténoïde, formé par rotation d'une courbe en U, nommée chaînette, autour de la droite passant par les deux centres des cercles.

La chaînette est la courbe que prend naturellement une chaîne homogène pendue à deux crochets (ici à la même hauteur). Elle ressemble à une parabole avec un rien d'embonpoint près du sommet. Deux fils de fer circulaires plongés dans de l'eau savonneuse illustrent le théorème d'Euler en faisant apparaître le caténoïde dans toute sa splendeur (voir la figure 1).



1. Les films de savon forment toujours des surfaces d'aire minimale. Par exemple, le film de savon s'appuyant sur deux cercles de même axe (à gauche) a une forme de caténoïde. Sur un cadre cubique (au milieu) ou tétraédrique (à droite), des films de savon forment des surfaces quasi planes dont les intersections forment des angles précis.

Photographies de Michael Dalton, Fundamental Photographs