

Photogram-Stone Images



Bulles de savants

IAN STEWART

À propos de films où les mousses coincent la bulle.

Première devinette : quel solide possède 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces, chacune ayant 5 côtés ? Le dodécaèdre. Seconde devinette : quel solide a 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces, chacune de 5,103 côtés ? Vous pensez peut-être à un fractal tarabiscoté ? Ce n'est pas la bonne piste : le solide est familier. Recherchez-le en buvant un verre de bière, en prenant une douche ou en faisant la vaisselle.

Même avec ces indications, vous aurez du mal à deviner, car la question était biaisée : le solide en question n'a les propriétés annoncées qu'en moyenne et, de surcroît, ce n'est pas un vrai solide. C'est la mousse, qui est composée de myriades de bulles, lesquelles sont de minuscules polyèdres irréguliers. En moyenne, les bulles d'une mousse ont 22,9 sommets, 34,14 arêtes et 13,39 faces. Une bulle moyenne ressemblerait à un «tridéca-et-des-poussières-èdre».

Les mathématiques des bulles et de la mousse sont nées dans les années 1830, bien après l'invention du savon, lorsque le physicien belge Joseph Plateau plongea des cadres en fils de fer dans de l'eau savonneuse. Malgré 170 années de recherches, on ne comprend pas plusieurs des phénomènes observés par Plateau.

Par exemple, personne n'a démontré la conjecture de la double bulle, qui

stipule que la forme adoptée par deux bulles adjacentes est composée de trois surfaces sphériques (voir la figure 3). En 1995, Joel Hass, de l'Université de Californie, et Roger Schlafly, de la Société *Real Software*, ont démontré cette conjecture pour deux bulles de même volume.

LES SURFACES MINIMALES

En 1829, Plateau se brûla les yeux alors qu'il observait le Soleil à l'œil nu pendant 25 secondes. Il en resta aveugle, mais continua de contribuer toute sa vie à ce domaine des mathématiques éminemment visuel : la géométrie dans l'espace.

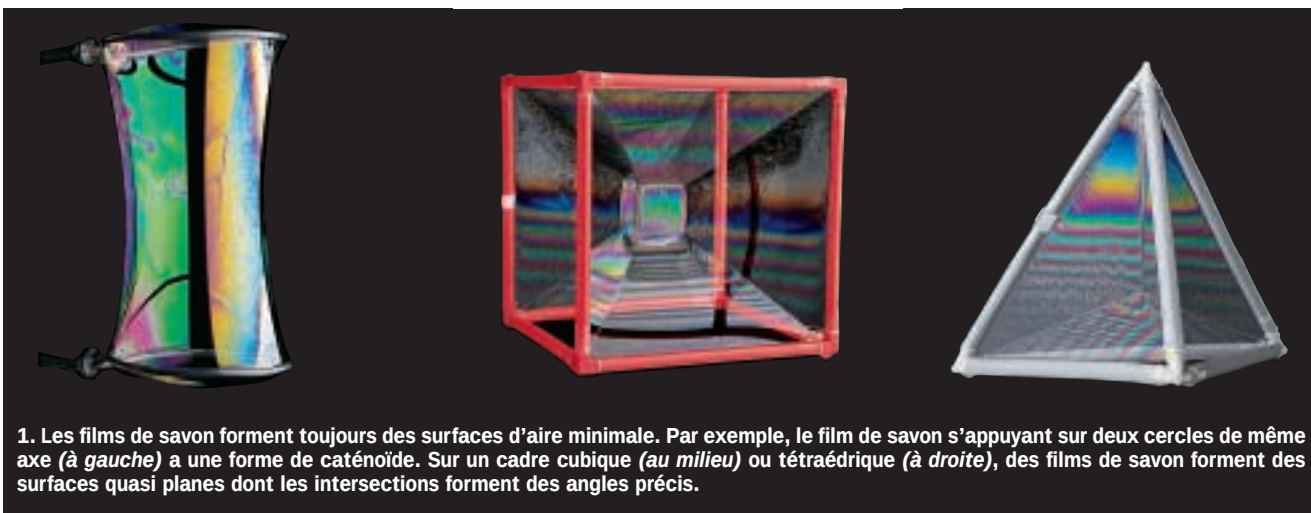
Les bulles et les films de savon appartiennent à la famille mathématique très étudiée des surfaces minimales : des surfaces répondant à certaines contraintes et dont l'aire est minimale. Cette minimisation de l'aire découle du principe universel de minimisation de l'énergie. Puisque l'énergie de tension d'un film de savon est proportionnelle à sa surface, l'énergie des bulles est minimale quand l'aire l'est.

Un film de savon à l'équilibre est comparable à une surface mathématique d'épaisseur nulle : son épaisseur, de l'ordre de un milliardième de mètre, est négligeable. Sans aucune contrainte, une bulle de savon évolue jusqu'à ce que son

aire soit nulle, mais on leur impose généralement de contenir un volume précis ou d'avoir leur frontière sur une certaine surface ou sur une certaine courbe. Par exemple, une bulle qui se pose sur une table est une demi-sphère : c'est la plus petite surface entourant un volume donné (l'air emprisonné dans la bulle) et ayant sa frontière sur un plan.

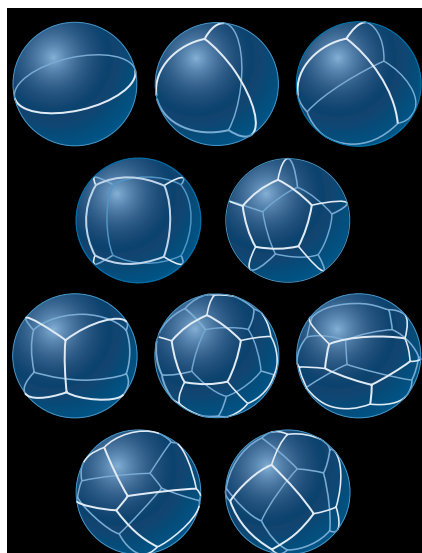
Plateau s'est intéressé aux surfaces dont la frontière est une courbe imposée. Il matérialisait les courbes par un fil ou par plusieurs fils soutenus par un cadre. Par exemple, quelle est la surface minimale dont la frontière est formée de deux cercles parallèles, de même rayon ? Le mathématicien suisse Leonhard Euler, le «prince des mathématiques», démontra que la véritable surface minimale ayant une telle frontière n'est pas un cylindre, mais un caténoïde, formé par rotation d'une courbe en U, nommée chaînette, autour de la droite passant par les deux centres des cercles.

La chaînette est la courbe que prend naturellement une chaîne homogène pendue à deux crochets (ici à la même hauteur). Elle ressemble à une parabole avec un rien d'embonpoint près du sommet. Deux fils de fer circulaires plongés dans de l'eau savonneuse illustrent le théorème d'Euler en faisant apparaître le caténoïde dans toute sa splendeur (voir la figure 1).



1. Les films de savon forment toujours des surfaces d'aire minimale. Par exemple, le film de savon s'appuyant sur deux cercles de même axe (à gauche) a une forme de caténoïde. Sur un cadre cubique (au milieu) ou tétraédrique (à droite), des films de savon forment des surfaces quasi planes dont les intersections forment des angles précis.

Photographies de Michael Dalton, Fundamental Photographs



2. Les règles de Plateau pour les angles formés par les arêtes de bulles adjacentes limitent à dix le nombre d'arrangements possibles. Les sommets sont entourés d'une sphère sur laquelle les faces se coupent à 120 degrés. Parmi les dix formes qui répondent à ce critère, seulement les trois premières sont physiquement possibles, car elles correspondent à des aires minimales.

Michael Goodman

Richard Courant et Herbert Robbins, pour leur livre *What Is Mathematics ?*, ont effectué certaines des expériences originelles de Plateau en plongeant des polyèdres réguliers en fils dans de l'eau savonneuse. Le cas le plus simple, totalement expliqué, est celui du tétraèdre régulier (quatre faces triangulaires et six arêtes égales), où la surface minimale est la réunion de six triangles qui se rencontrent au centre du tétraèdre (voir la figure 1). Le long des lignes joignant les sommets au centre, les films se rencontrent par trois, formant des angles de 120 degrés entre les faces ; au centre, quatre arêtes font deux à deux des angles de 109 degrés 28 minutes. Ces deux valeurs cruciales interviennent chaque fois que plusieurs films de savon sont en contact et qu'il n'y a pas d'air emprisonné ou que les pressions de part et d'autre de chaque film sont égales et, donc, se neutralisent.

Le solide le plus simple après le tétraèdre est le cube. Il conduit à un arrangement, plus complexe, de 13 surfaces presque planes dont l'analyse est inachevée (voir la figure 1).

Dans une mousse, les films sont faiblement courbés, et sont donc assimilés à des faces planes. Cette approximation n'est plus valable pour les films proches de la surface externe de la mousse. Cette limite explique les étranges valeurs citées au début de cet article.

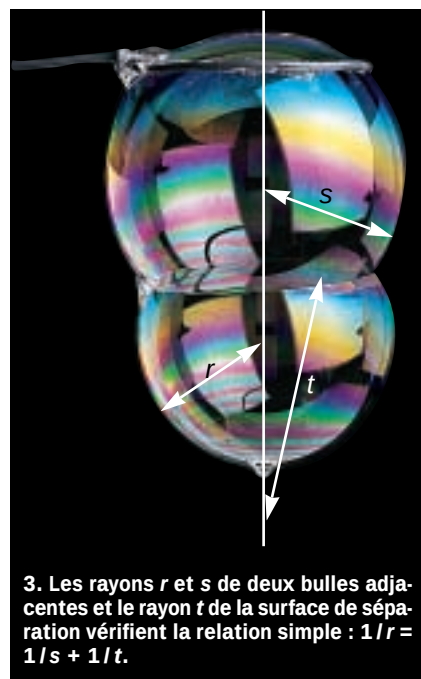
On estime les nombres moyens de sommets, d'arêtes et de faces de toute mousse en admettant que la mousse est constituée d'un grand nombre de polyèdres identiques dont les faces sont des polygones réguliers.

La découverte de l'angle de 120 degrés est souvent attribuée au géomètre Jacob Steiner, en 1837. Cependant, Steiner avait été devancé de deux siècles par Evangelista Torricelli et Francesco Cavalieri. Vers 1640, ces mathématiciens cherchaient le point de l'intérieur d'un triangle donné dont la somme de ses distances aux trois sommets est la plus petite possible. Ils avaient démontré que, lorsque aucun angle n'est supérieur à 120 degrés, c'est le point qui voit les trois côtés sous un angle de 120 degrés. Si l'un des angles du triangle est supérieur à 120 degrés, le point est son sommet. Le problème des films de savon est similaire à celui des triangles.

LES BULLES ET LES SPHÈRES

En 1976, Frederick Almgren, de l'Université de Princeton, et Jean Taylor, de l'Institut de technologie du Massachusetts, ont démontré la seconde valeur (109 degrés 28 minutes) observée par Plateau. Ils ont d'abord considéré les sommets où six faces se croisent le long de quatre arêtes communes – par exemple, les six triangles formés dans un tétraèdre (voir la figure 1). Ils ont montré que les légères courbures observées sur les films de savon sont négligeables. Puis, afin de transformer un problème tridimensionnel à un problème plus simple, ils ont imaginé une petite sphère englobant un ou plusieurs sommets de ce type – par exemple le centre du tétraèdre – et ils ont déterminé les intersections de cette sphère avec les «quasi-plans» des faces. Les films de savon matérialisant une surface minimale, les arcs obtenus sont des «courbes minimales» : leurs longueurs totales sont aussi petites que possible. Par l'analogie sphérique du théorème de Torricelli-Cavalieri, ces arcs doivent toujours se couper suivant des angles de 120 degrés.

F. Almgren et J. Taylor ont prouvé qu'il y a exactement dix configurations distinctes d'arcs (voir la figure 2) satisfaisant ce critère. Ils ont ensuite essayé de diminuer l'aire totale des films à l'intérieur de la boule, en introduisant éventuellement de nouveaux morceaux de film. Quand ils parvenaient à réduire la surface, ils éliminaient le cas considéré, car il ne correspondait pas à une véritable surface minimale. Seules les conformations observées par Plateau ont



3. Les rayons r et s de deux bulles adjacentes et le rayon t de la surface de séparation vérifient la relation simple : $1/r = 1/s + 1/t$.

survécu à ce traitement (les trois premières de la figure 2) : un unique film sur le plan équatorial de la sphère, trois intersections le long de l'axe de la sphère et formant entre eux des angles de 120 degrés, ou six intersections à 109 degrés 28 minutes identiques à celles rencontrées dans le tétraèdre.

La règle des 120 degrés mène à une jolie propriété pour deux bulles adjacentes. Si la conjecture de la double bulle est exacte (voir la figure 3), les trois rayons vérifient une relation simple que l'on confirme expérimentalement. Si r et s sont les rayons des deux bulles, r étant celui de la plus petite et si t est le rayon de la surface séparatrice, alors : $1/r = 1/s + 1/t$.

En 1995, J. Hass et R. Schlafly ont montré que, dans l'hypothèse où les deux bulles sont de même volume, les surfaces sont des parties de sphère. Ils ont utilisé un ordinateur qui a calculé en 20 minutes, 200 260 opérations associées à des possibilités concurrentes.

Dans le cas des volumes inégaux, quelle que soit la configuration minimale de la double bulle, elle doit être une surface de révolution. Le problème se ramène donc à l'étude d'une famille de courbes dans un même plan. Cependant, la réponse reste encore aussi insaisissable que lorsque Plateau, presque aveugle, plongeait ses premières structures en fils dans un récipient d'eau savonneuse.

Stefan HILDEBRANDT et Anthony TROMBA, Mathématiques et formes optimales, Éditions Pour la Science / Belin, 1998.