

## LA DYNAMIQUE DU YO-YO

L'étude de la physique n'est pas un passage obligé pour le maniement du yo-yo, mais elle peut vous suggérer des améliorations de l'appareil et au moins une meilleure synchronisation des mouvements.

Un yo-yo lâché sans vitesse initiale tombe en déroulant la ficelle. La vitesse de descente  $v$ , la vitesse de rotation  $\omega$  et le rayon du moyeu sur lequel s'enroule la ficelle  $r$ , sont reliés par le déroulement de la ficelle :  $v = \omega r$ .

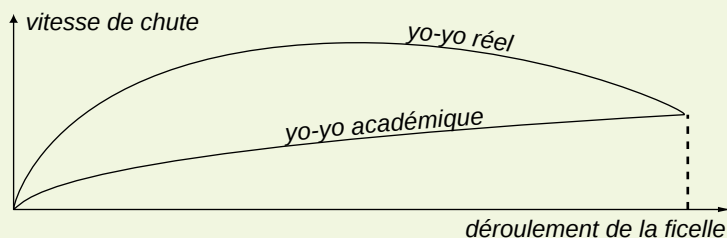
La somme de l'énergie cinétique de translation,  $1/2 mv^2$ , et de l'énergie de rotation,  $1/2 J \omega^2$ , est égale à l'énergie potentielle  $mgh$  ( $h$  est la hauteur de chute,  $J$  est le moment d'inertie du yo-yo, et  $m$  sa masse.)

Il s'ensuit que la vitesse est donnée par la formule :

$$v = \sqrt{2gh / (1 + J/mr^2)}$$

$J/mr^2$  est le quotient de l'énergie de rotation sur l'énergie de translation. Si  $J$  est nul, on retrouve l'expression pour la vitesse de chute libre d'un corps. La rotation du yo-yo diminue la vitesse de chute : toute l'énergie potentielle n'est pas convertie en énergie de translation.

Le rayon  $r$  diminue avec la hauteur de chute, car le diamètre de la ficelle n'est pas nul. C'est ce qui distingue le yo-yo réel du yo-yo que nous appellerons "académique" où le rayon du moyeu est constant. La vitesse  $v$  de chute du yo-yo réel passe par un maximum puis diminue, la vitesse finale étant identique pour les deux yo-yo : elle correspond, dans la formule, au rayon minimal  $r_0$  du moyeu. La durée de chute pour le yo-yo réel est plus faible que pour le yo-yo académique. Avec les paramètres d'un yo-yo réel, cette durée de chute est de 1,3 seconde alors que pour le yo-yo académique elle est de 3,8 secondes. Il serait intéressant de vérifier ces valeurs en utilisant un fil très fin à la place de la ficelle habituelle, transformant ainsi le yo-yo réel en yo-yo académique.



rotation est diminuée par les frottements, les ressorts resserrent les mâchoires sur le moyeu où est fixée la ficelle et le yo-yo remonte. Ce principe de débrayage-embayage a été utilisé dans les mobylettes et dans l'embayage des 2 CV Citroën. Le moyeu en Téflon réduit la friction et la durée de la roue libre peut atteindre plusieurs secondes, ce qui est avantageux, voire indispensable pour les figures complexes.

Pour augmenter la vitesse de rotation, il est avantageux de lancer le yo-yo en lui conférant une vitesse initiale, donc une énergie cinétique additionnelle, au lieu de le laisser simplement tomber. Les champions amènent la vitesse de rotation en roue libre à plus de 140 tours par seconde, ce qui correspond à la vitesse que le yo-yo atteindrait après une chute de 25 mètres. La vitesse de rotation à la périphérie du moyeu dépasse alors 100 kilomètres/heure.

Certains yo-yo sont dépourvus d'embayage, mais la ficelle forme une boucle autour de l'axe : en bas de la descente il tourne sans remonter jusqu'à ce que les frottements l'arrêtent. Avant l'arrêt on peut déclencher la remontée en tirant d'un coup sec sur la corde, ce qui resolidarise le moyeu et l'axe tournant du yo-yo.

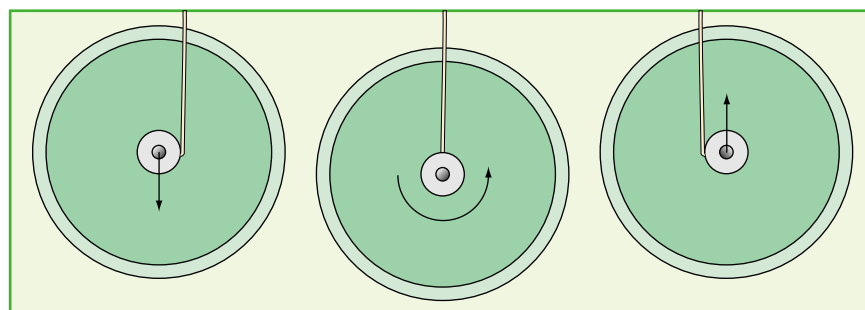
## UN PETIT ANIMAL INDOCILE

Le yo-yo peut vibrer et devenir incontrôlable. Le yo-yo se souvient alors que son mouvement peut se faire à trois dimensions, et que sa masse peut tourner hors du plan de sa trajectoire, ce qui est un inconvénient pour les figures. Le moment dangereux est celui où sa vitesse de rotation est la plus faible, c'est-à-dire lorsqu'il revient dans la main. Quand la vitesse de rotation est forte l'axe de rotation du yo-yo est maintenu horizontal par effet gyroscopique : tout changement de direction engendre une force perpendiculaire à ce changement qui limite les errements de l'axe. Si la ficelle est tordue, le yo-yo peut devenir incontrôlable, aussi des yo-yo, inventés par P. MacCarthy de l'École des Mines du Colorado, utilisent-ils un ruban au lieu d'une ficelle : un ruban ne peut se tordre lorsqu'il s'enroule.

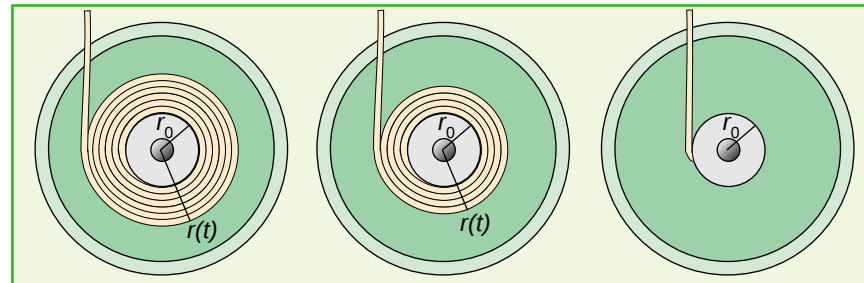
Le yo-yo est un exemple d'application de nombreux principes physiques, et il remplace avantageusement, pour une initiation à la dynamique, le simpliste pendule simple ou le déprimant ressort.

W. BERGER, *The Yo-yo, a Toy Fly-wheel*, *American Scientist*, vol. 72, n° 2, mars-avril 1984, pp 137-142.

Brian H. KAYE, *Golf Balls, Boomerang and Asteroids*, VCH, 1996.



2. En bas de sa course, la vitesse de rotation du yo-yo est maximale. Là, le yo-yo pivote d'un demi-tour autour du point d'attache de la ficelle puis remonte le long de la corde. Cette rotation est de faible durée par rapport au temps de chute du yo-yo et peut-être considérée comme instantanée (en l'absence de roue libre).



3. Le yo-yo réel diffère du yo-yo «académique» en ce que le rayon du moyeu  $r(t)$  varie en fonction de la hauteur de chute. Au début de la chute, le rayon  $r(t)$  est grand : le yo-yo réel tourne moins vite que le yo-yo académique et sa vitesse de chute est supérieure.



# Du chocolat au savon

IAN STEWART

*Un jeu «plaisant», qui possède une stratégie gagnante simple, peut avoir des règles très proches d'un jeu «affreux», où les stratégies gagnantes n'existent pas.*

Le morpion est un exemple de jeu dont la règle est simple et dont la stratégie gagnante est également simple. En revanche, aucune stratégie gagnante n'existe dans d'autres jeux tels que celui des petits carrés, où l'on trace des segments de droite sur un quadrillage afin de capturer tout carré complètement entouré. L'existence d'une stratégie gagnante simple n'est pas systématique dans les jeux aux règles simples.

Je nomme «jeux plaisants» les jeux à stratégie gagnante connue ; «jeux

affreux», les autres. Des jeux aux règles très similaires ont parfois des stratégies étonnamment différentes. Les jeux affreux sont souvent les plus intéressants, car le gagnant n'est pas prédéterminé. Néanmoins, dans certains d'entre eux, on peut savoir qui devrait gagner, par exemple le premier joueur, sans savoir comment il peut le faire.

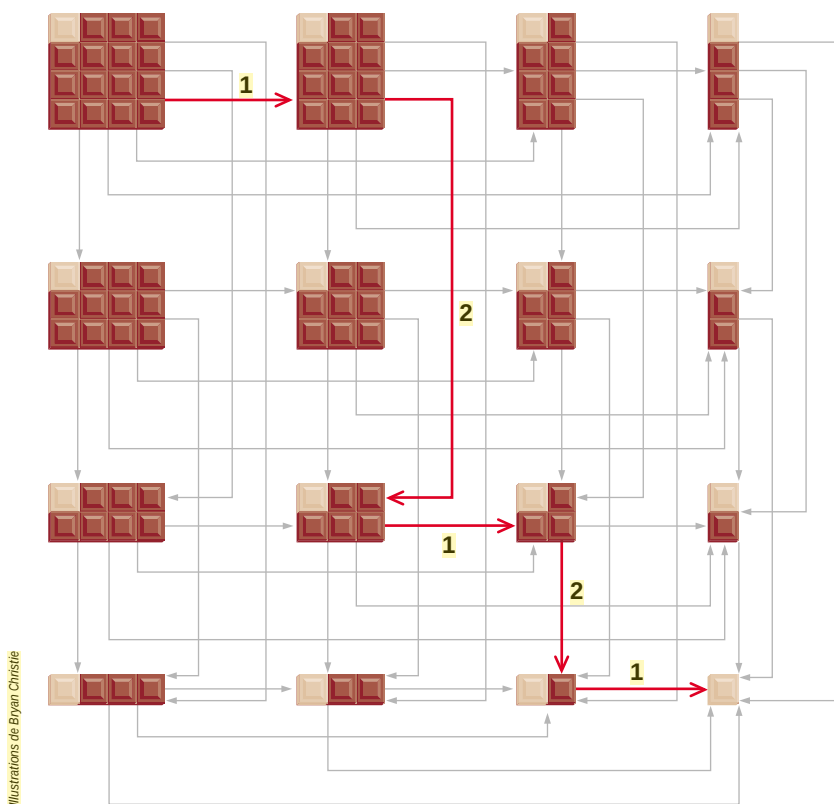
Examinons deux jeux simples avec du chocolat. Le premier, que nous appellerons Mange savon simple, est un jeu plaisant. Le second, Mange savon géné-

ralisé, qui a des règles similaires, est un jeu affreux : avec un jeu optimal, le premier joueur doit toujours gagner, mais aucune stratégie gagnante n'est connue. Il a été inventé par David Gale, de l'Université de Berkeley, qui le présente dans son nouveau livre *Automatic Ant and other Mathematical Explorations* (Springer-Verlag, 1998). En revanche, j'ignore qui a inventé le Mange savon simple. Il m'a été proposé par Keith Austin, un mathématicien de l'Université de Sheffield.

Il se joue avec une plaque de chocolat idéale : un rectangle divisé en carrés égaux. Deux joueurs, Lionel et Jacques, détachent tour à tour des morceaux de chocolat qu'ils mangent au fur et à mesure. Chaque morceau doit être composé d'une ou de plusieurs rangées de carrés formant un bord de la plaque restante (les rangées ne peuvent avoir qu'un seul carré de largeur). Le carré supérieur gauche est, non pas en chocolat, mais en savon ; le joueur qui est finalement obligé de le manger est le perdant.

Les flèches rouges de la figure 1 indiquent les coups successifs d'une partie possible à partir d'une plaque carrée de chocolat de quatre carrés de côté. Dans cette partie, Lionel joue en premier et Jacques commet une erreur fatale lors de son premier coup : il perd une partie qu'il aurait dû gagner. Les flèches grises indiquent tous les coups possibles. Le diagramme est l'arbre du jeu pour une partie de Mange savon simple sur une plaque carrée de 16 carrés.

Une stratégie gagnante est une suite de coups qui mène à la victoire quel que soit le jeu de l'adversaire. La théorie de la stratégie gagnante pour les jeux «finis», ceux qui ne se poursuivent pas indéfiniment ni ne conduisent à des parties nulles, est fondée sur deux principes simples dont la circularité logique n'est qu'apparente : une position est



1. L'ARBRE DES JEUX pour le jeu de Mange savon simple, à partir d'une tablette de chocolat carrée de quatre carrés de côté. Les flèches rouges montrent le déroulement d'une partie que Lionel commence et que Jacques perd : il doit manger le carré supérieur gauche. Les flèches grises indiquent les coups possibles.

gagnante lorsqu'elle permet, en quelques coups, de placer l'adversaire dans une position perdante ; une position est perdante lorsque n'importe quel coup joué place l'adversaire en position gagnante. Utilisons ces deux définitions pour déterminer une stratégie gagnante au jeu du Mange savon simple sur une plaque carrée de 16 carrés. L'astuce consiste à remonter le cours du jeu à partir de la fin : ce processus se nomme «élager l'arbre du jeu». Examinons le procédé.

On sait que le joueur qui perd est celui qui doit manger le carré de savon. Aussi, quand un joueur est finalement face à un rectangle, d'un seul carré de chocolat de largeur, incluant le carré de savon (à gauche ou en haut du rectangle), il est dans une position gagnante : il lui suffit de séparer le carré de savon et de le laisser à son adversaire. Dans l'arbre du jeu, ces positions (*en bas ou à droite*) sont directement reliées par une flèche grise à la position finale.

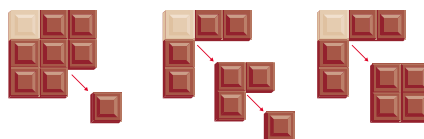
Remontons dans l'arbre du jeu. Un joueur qui reçoit le carré de savon et les trois carrés de chocolat contigus est dans une position perdante, puisque les seuls coups qu'il puisse jouer conduiront son adversaire à une position gagnante. Aussi toute position conduisant directement à celle-ci est-elle gagnante. En itérant le même raisonnement pour des étapes de jeu précédentes, on conclut qu'un joueur est en position perdante quand il reçoit un morceau de chocolat carré, et en position gagnante dans tous les autres cas. Tout morceau rectangulaire peut être réduit à un morceau carré en un seul coup, et un morceau carré conduit toujours à un rectangle non carré.

De ce fait, pour le Mange savon simple sur une plaque carrée de 16 carrés, le premier joueur perd à coup sûr, tandis que le second gagne s'il forme un carré chaque fois qu'il joue. Dans la partie que nous avons examinée initialement, Jacques perd pour ne pas avoir suivi cette stratégie. L'analyse montre aussi que toute partie dont la plaque de chocolat initiale est un rectangle non carré peut être gagnée par le premier joueur. Le Mange savon simple est un jeu plaisant, quelle que soit la taille de la plaque de chocolat utilisée.

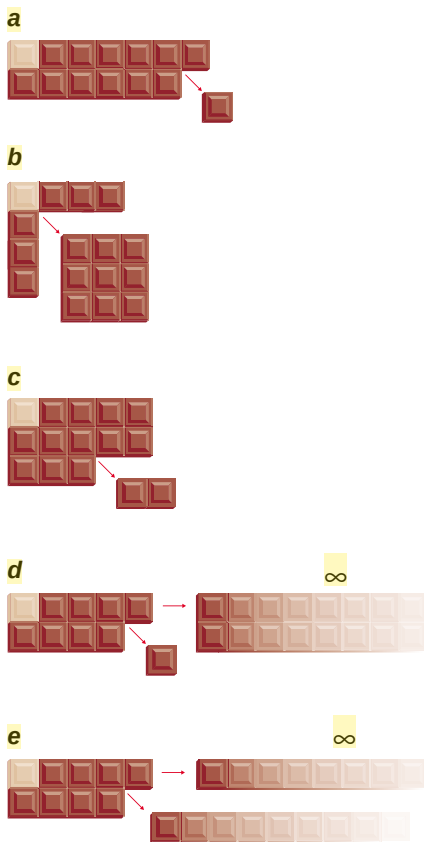
La technique d'élitage de l'arbre identifie les stratégies de n'importe quel jeu fini. La «racine» de l'arbre est la position initiale, et les extrémités sont les positions finales. Comme l'arbre du jeu est fini, on peut descendre des extrémités de l'arbre à sa racine et déterminer le caractère gagnant ou perdant d'une position donnée. Lorsque la racine est une position gagnante, le premier joueur

gagne en plaçant à chaque coup son adversaire dans une position perdante. La difficulté de l'élitage dépend de la taille de l'arbre, laquelle dépend des règles du jeu ; quand les coups possibles sont nombreux, l'arbre est gigantesque.

Le Mange savon généralisé possède des règles similaires à celles du Mange savon simple, mais l'élitage de son arbre devient très vite impossible et, même quand il reste possible, il ne révèle pas systématiquement de particularité conduisant à une stratégie gagnante simple. À nouveau, un joueur gagne quand son adversaire est amené à manger le carré de savon du coin supérieur gauche de la plaque de chocolat. Cependant, à chaque coup, les joueurs peuvent briser la plaque de chocolat de façons plus variées : ils choisissent un carré et détachent le morceau formé par ce carré et par ceux



**2. AU JEU DE MANGE SAVON GÉNÉRALISÉ, le joueur qui a le trait a une stratégie gagnante.**



**3. LE PREMIER JOUEUR gagne au jeu de Mange savon généralisé quand la tablette est de type  $2 \times n$  (a),  $n \times n$  (b), et  $3 \times 5$  (c) ; le deuxième joueur gagne dans la généralisation  $2 \times \infty$  (d et e).**

qui sont à sa droite ou sous lui (voir la figure 2).

On démontre que, pour toute plaque, Lionel commence en position gagnante. Supposons qu'au contraire Jacques ait une stratégie gagnante. Lionel commence en détachant le coin inférieur droit. Jacques n'est alors pas en position perdante, puisque, selon l'hypothèse, la position d'ouverture est perdante pour Lionel. Jacques peut donc jouer un coup gagnant (voir la figure 2b), qui met Lionel dans une position perdante. Or, Lionel aurait pu jouer l'équivalent des deux coups en un seul, au début du jeu (voir la figure 2c). L'hypothèse qui stipule que Jacques a une stratégie gagnante est contredite ; elle est donc fausse, et Lionel a donc une stratégie gagnante. Les preuves de ce type sont nommées raisonnements par l'absurde. Hélas, elles ne révèlent pas les stratégies gagnantes.

Au jeu du Mange savon généralisé, on ne connaît la stratégie gagnante que pour des cas simples. Par exemple, avec des tablettes composées de deux rangées (ou deux colonnes) de carrés de chocolat, Lionel peut toujours placer Jacques en position perdante en retirant le seul carré du coin en bas à droite (voir la figure 3a). Dans le cas de tablettes carrées, Lionel peut gagner en retirant la totalité de la tablette, sauf le L formé des bords supérieur et gauche (voir la figure 3b) ; aux tours suivants, Lionel doit reproduire tous les coups de Jacques sur l'autre branche du L. Quelques rares autres cas sont connus. Par exemple, avec les tablettes  $3 \times 5$ , Lionel gagne en retirant les deux carrés à l'extrême droite du bord inférieur (voir la figure 3c). Il existe parfois plusieurs stratégies gagnantes. Ainsi, avec une tablette de six carrés de largeur et de 13 carrés de longueur, deux premiers coups sont gagnants.

On peut aussi jouer à Mange savon généralisé avec une tablette de chocolat infinie. Paradoxalement, ce jeu est fini, car, après un nombre fini de coups, il ne reste qu'un nombre fini de carrés. Jacques gagne parfois, par exemple avec une plaque de deux carrés de largeur et une infinité de carrés de longueur : quoi que Lionel joue initialement, Jacques peut laisser au deuxième coup un rectangle privé de son coin inférieur droit (voir les figures 3d et 3e), position que nous avons vue être perdante.

On imagine bien d'autres généralisations : avec une plaque infinie aussi bien sur sa largeur que sur sa longueur, ou à trois dimensions, ou à plus de trois dimensions... mais les éventuelles stratégies gagnantes restent alors à trouver.