

gagnante lorsqu'elle permet, en quelques coups, de placer l'adversaire dans une position perdante ; une position est perdante lorsque n'importe quel coup joué place l'adversaire en position gagnante. Utilisons ces deux définitions pour déterminer une stratégie gagnante au jeu du Mange savon simple sur une plaque carrée de 16 carrés. L'astuce consiste à remonter le cours du jeu à partir de la fin : ce processus se nomme «élager l'arbre du jeu». Examinons le procédé.

On sait que le joueur qui perd est celui qui doit manger le carré de savon. Aussi, quand un joueur est finalement face à un rectangle, d'un seul carré de chocolat de largeur, incluant le carré de savon (à gauche ou en haut du rectangle), il est dans une position gagnante : il lui suffit de séparer le carré de savon et de le laisser à son adversaire. Dans l'arbre du jeu, ces positions (*en bas ou à droite*) sont directement reliées par une flèche grise à la position finale.

Remontons dans l'arbre du jeu. Un joueur qui reçoit le carré de savon et les trois carrés de chocolat contigus est dans une position perdante, puisque les seuls coups qu'il puisse jouer conduiront son adversaire à une position gagnante. Aussi toute position conduisant directement à celle-ci est-elle gagnante. En itérant le même raisonnement pour des étapes de jeu précédentes, on conclut qu'un joueur est en position perdante quand il reçoit un morceau de chocolat carré, et en position gagnante dans tous les autres cas. Tout morceau rectangulaire peut être réduit à un morceau carré en un seul coup, et un morceau carré conduit toujours à un rectangle non carré.

De ce fait, pour le Mange savon simple sur une plaque carrée de 16 carrés, le premier joueur perd à coup sûr, tandis que le second gagne s'il forme un carré chaque fois qu'il joue. Dans la partie que nous avons examinée initialement, Jacques perd pour ne pas avoir suivi cette stratégie. L'analyse montre aussi que toute partie dont la plaque de chocolat initiale est un rectangle non carré peut être gagnée par le premier joueur. Le Mange savon simple est un jeu plaisant, quelle que soit la taille de la plaque de chocolat utilisée.

La technique d'élagement de l'arbre identifie les stratégies de n'importe quel jeu fini. La «racine» de l'arbre est la position initiale, et les extrémités sont les positions finales. Comme l'arbre du jeu est fini, on peut descendre des extrémités de l'arbre à sa racine et déterminer le caractère gagnant ou perdant d'une position donnée. Lorsque la racine est une position gagnante, le premier joueur

gagne en plaçant à chaque coup son adversaire dans une position perdante. La difficulté de l'élagement dépend de la taille de l'arbre, laquelle dépend des règles du jeu ; quand les coups possibles sont nombreux, l'arbre est gigantesque.

Le Mange savon généralisé possède des règles similaires à celles du Mange savon simple, mais l'élagement de son arbre devient très vite impossible et, même quand il reste possible, il ne révèle pas systématiquement de particularité conduisant à une stratégie gagnante simple. À nouveau, un joueur gagne quand son adversaire est amené à manger le carré de savon du coin supérieur gauche de la plaque de chocolat. Cependant, à chaque coup, les joueurs peuvent briser la plaque de chocolat de façons plus variées : ils choisissent un carré et détachent le morceau formé par ce carré et par ceux

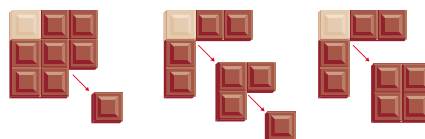
qui sont à sa droite ou sous lui (voir la figure 2).

On démontre que, pour toute plaque, Lionel commence en position gagnante. Supposons qu'au contraire Jacques ait une stratégie gagnante. Lionel commence en détachant le coin inférieur droit. Jacques n'est alors pas en position perdante, puisque, selon l'hypothèse, la position d'ouverture est perdante pour Lionel. Jacques peut donc jouer un coup gagnant (voir la figure 2b), qui met Lionel dans une position perdante. Or, Lionel aurait pu jouer l'équivalent des deux coups en un seul, au début du jeu (voir la figure 2c). L'hypothèse qui stipule que Jacques a une stratégie gagnante est contredite ; elle est donc fausse, et Lionel a donc une stratégie gagnante. Les preuves de ce type sont nommées raisonnements par l'absurde. Hélas, elles ne révèlent pas les stratégies gagnantes.

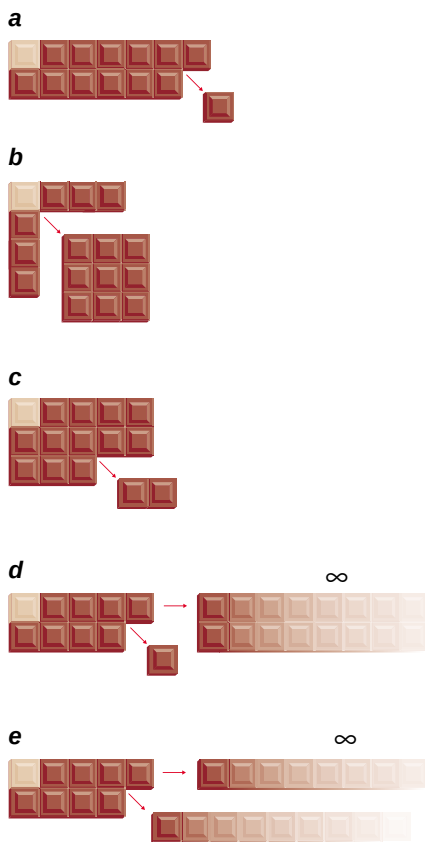
Au jeu du Mange savon généralisé, on ne connaît la stratégie gagnante que pour des cas simples. Par exemple, avec des tablettes composées de deux rangées (ou deux colonnes) de carrés de chocolat, Lionel peut toujours placer Jacques en position perdante en retirant le seul carré du coin en bas à droite (voir la figure 3a). Dans le cas de tablettes carrées, Lionel peut gagner en retirant la totalité de la tablette, sauf le L formé des bords supérieur et gauche (voir la figure 3b) ; aux tours suivants, Lionel doit reproduire tous les coups de Jacques sur l'autre branche du L. Quelques rares autres cas sont connus. Par exemple, avec les tablettes 3×5 , Lionel gagne en retirant les deux carrés à l'extrême droite du bord inférieur (voir la figure 3c). Il existe parfois plusieurs stratégies gagnantes. Ainsi, avec une tablette de six carrés de largeur et de 13 carrés de longueur, deux premiers coups sont gagnants.

On peut aussi jouer à Mange savon généralisé avec une tablette de chocolat infinie. Paradoxalement, ce jeu est fini, car, après un nombre fini de coups, il ne reste qu'un nombre fini de carrés. Jacques gagne parfois, par exemple avec une plaque de deux carrés de largeur et une infinité de carrés de longueur : quoi que Lionel joue initialement, Jacques peut laisser au deuxième coup un rectangle privé de son coin inférieur droit (voir les figures 3d et 3e), position que nous avons vue être perdante.

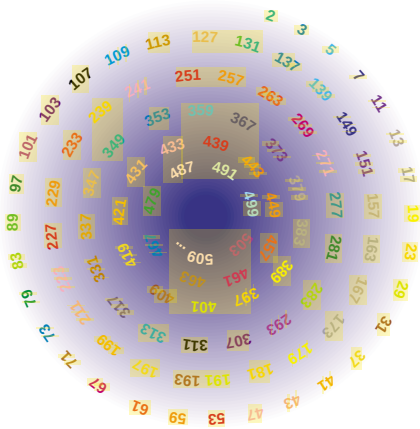
On imagine bien d'autres généralisations : avec une plaque infinie aussi bien sur sa largeur que sur sa longueur, ou à trois dimensions, ou à plus de trois dimensions... mais les éventuelles stratégies gagnantes restent alors à trouver.



2. AU JEU DE MANGE SAVON GÉNÉRALISÉ, le joueur qui a le trait a une stratégie gagnante.



3. LE PREMIER JOUEUR gagne au jeu de Mange savon généralisé quand la tablette est de type $2 \times n$ (a), $n \times n$ (b), et 3×5 (c) ; le deuxième joueur gagne dans la généralisation $2 \times \infty$ (d et e).



Formules pour les nombres premiers

JEAN-PAUL DELAHAYE

On sait enfermer tous les nombres premiers dans des formules simples. Est-ce utile ?

Les nombres pairs sont donnés par une formule $p(n) = 2n$, qui n'a rien de mystérieux : elle indique que le double de tout entier est un nombre pair. Les nombres impairs sont donnés par la formule $l(n) = 2n+1$. Existe-t-il une formule analogue pour les nombres premiers, ces nombres qui ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes (notons que 1 n'est pas considéré comme premier) ? Les dix plus petits nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, et Euclide a montré qu'ils sont en nombre infini.

Cette recherche d'une formule pour les nombres premiers passionne les amateurs d'arithmétique depuis longtemps et a produit d'étonnants résultats. Elle conduit à des exercices distrayants de raisonnement et de calcul, permet de préciser ce qu'on entend par formule, pour finalement nous plonger dans le monde de l'informatique.

Il est vite apparu qu'il était impossible d'engendrer tous les nombres premiers (ou même de n'engendrer que des nombres premiers, pas nécessairement tous, ni dans l'ordre) à l'aide d'une formule du type $f(n) = an + b$ pour n positif. Voyons pourquoi. Supposons que $an + b$ soit un nombre premier pour tout n supérieur à 0.

Comme la formule est exacte pour $n = 0$, $f(0) = b$, et b est un nombre premier. Mais alors $f(b) = ab + b$ est aussi un nombre premier, et comme $ab + b = (a+1)b$ est divisible par b et $(a+1)$, ou bien $b = 1$, ce qui est impossible puisque b est un nombre premier, ou bien $a+1 = 1$, ce qui conduit à $a = 0$, et donc à la formule $f(n) = b$ qui donne toujours le même nombre premier. Les seules formules de type $an + b$ qui ne donnent que des nombres premiers sont celles (sans intérêt) où a est égal à 0 et b est un nombre premier. On montre par un raisonnement

similaire que, si une formule (dite polynomiale) $f(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0$, ne donne que des nombres premiers pour tout n positif, alors c'est que $f(n)$ est constant (et donc sans intérêt). Triste conclusion : un polynôme à une variable, aussi compliqué soit-il, ne donnera jamais de nombres premiers pour toute valeur positive de n , sauf s'il n'en donne qu'un...

Démontrons ce résultat en raisonnant par l'absurde : nous supposons que $f(n)$ n'est pas constant et ne prend que des valeurs qui sont des nombres premiers pour n positif. On a $f(0) = a_0$, donc a_0 est premier. Par hypothèse, $f(n)$ qui n'est pas constant tend vers l'infini positif quand n tend vers l'infini (sinon $f(n)$ ne donnerait que des valeurs négatives à partir de certaines valeurs de n et donc ne conviendrait pas). Il existe donc un entier p tel que $f(pa_0)$ soit plus grand que a_0 . Alors $f(pa_0)$ est un multiple de a_0 (car c'est une somme de multiples de a_0) plus grand que a_0 . Ce n'est pas un nombre premier.

De multiples raffinements de ces deux résultats semblent éliminer tout espoir que nous puissions obtenir des formules intéressantes pour les nombres premiers. En voici quelques-uns.

- Si une fonction polynôme à plusieurs variables (telle que, par exemple, la fonction $f(n, m, p) = nm + p^2 + n^3 p^5 + 17$) ne prend que des valeurs premières pour les valeurs entières positives de ses variables, alors c'est une fonction constante (et donc sans intérêt).

- Si une fonction quotient des deux polynômes à plusieurs variables (exemple : $f(n, m, p, q, r) = (nm + p^2 + q^4 + r^3 + 19) / (p^2 + q^4 + r^3 + 1)$) ne prend que des valeurs premières pour les valeurs positives de ses variables, alors c'est une fonction constante (et donc sans intérêt).

- Si une fonction est de la forme $P2^Q + R$, où P , Q et R sont des polynômes à plusieurs variables (exemple : $f(n, p, q) = (n + 5p + q)2^{2n+p+3q} + p + 17$) ne prend que des valeurs premières pour les valeurs positives de ses variables, alors c'est une fonction constante (et donc sans intérêt).

- Même résultat avec, dans la formule précédente, 3 (ou n'importe quel entier supérieur à 2) à la place de 2, ou encore avec une somme de termes de la forme Pa^Q à la place d'un seul.

FAUT-IL RENONCER ?

Abandonner ? Que nenni ! Les polynômes ne sont pas tout : dans l'arsenal d'un mathématicien, il y a bien d'autres fonctions. Un résultat, démontré par W. Mills en 1947, a étonné tout le monde : il existe une constante A telle que la formule $[A^{3^n}]$ fournit un nombre premier pour tout n entier supérieur à 1.

Le crochet $[]$ désigne la fonction partie entière ou «arrondi à l'entier inférieur» : exemples : $[128,679] = 128$; $[3,14159] = 3$. Si on voulait une formule valable pour tout n positif, il suffirait de prendre : $[A^{3^{n+1}}]$. La constante A , dénommée constante de Mills,

1. FORMULE AVEC DES CONSTANTES RÉELLES

Il existe un nombre réel L tel que la formule :

$$[L \times 10^{n^2}] - [L \times 10^{(n-1)^2}] 10^{2n-1} \text{ pour tout } n \geq 1$$

donne le n -ième nombre premier : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$

Le nombre L est 0,200300005000000700000001100... (le n -ième nombre premier est placé en position n^2).

Suivons les calculs pour n égal à 4 :

$$[L \times 10^{16}] = 2003000050000007$$

(la multiplication par 10^{16} amène devant la virgule les décimales jusqu'au 7, et la partie entière coupe ce qui est derrière la virgule.)

$$[L \times 10^9] = 200300005$$

(même chose, mais avec le 5)

$$[L \times 10^9] 10^7 = 2003000050000000$$

(la multiplication par 10^7 égalise la longueur des deux nombres)

$$[L \times 10^{16}] - [L \times 10^9] 10^7 =$$

$$2003000050000007 - 2003000050000000 = 7.$$