

a été calculée avec une bonne précision, elle vaut : 1,3063778838630806904686144926025712916784585156713644368053759966434...

Pour $n = 1$, on obtient 2 ; pour $n = 2$, 11 ; pour $n = 3$, 1361 ; pour $n = 4$, 2521008887, nombres qui sont premiers, comme on le vérifie sans peine. Hélas, la formule $[A^{3^n}]$, amusante et curieuse, est sans intérêt pratique, car pour l'utiliser il faut connaître A avec une grande précision, ce qu'aujourd'hui on ne sait obtenir qu'en calculant... les nombres premiers eux-mêmes. Il paraît improbable qu'on puisse calculer cette constante autrement qu'à partir des nombres premiers, mais il serait merveilleux d'y parvenir. Cette formule ne donne les nombres premiers que parce que l'information sur les nombres premiers est cachée dans la constante A ... Dans la même veine, un résultat étrange a été démontré par G. Wright en 1951. Il existe

une constante w telle que la formule : $f(n) = [2^{2^{2^{2^{...^w}}}}]$, avec n exposants, fournit un nombre premier pour tout n supérieur ou égal à 1. La constante w , dénommée bien sûr constante de Wright, vaut 1,9287800...

La formule suivante – un peu plus compliquée – va faire comprendre pourquoi ni la formule de Mills ni celle de Wright ne sont autre chose que des curiosités : il existe une constante L (appelée parfois constante de Liouville-Erdős) telle que la formule : $[L \times 10^{n^2}] - [L \times 10^{(n-1)^2}] 10^{2n-1}$ donne le n -ième nombre premier pour tout $n \geq 1$: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17$, etc. Cette formule ne seulement ne donne que des nombres premiers (comme les deux précédentes), mais elle les donne tous dans l'ordre. L'escroquerie apparaît quand on voit la constante L :

$L = 0,20030000500000070000000110000000001300...$, le n -ième nombre premier est placé en position n^2 . Le détail du mécanisme de calcul est expliqué en figure 1.

PLUS DE TRICHE!

Ce type de formules étant une forme de tricherie, interdisons-nous d'utiliser des nombres réels qui peuvent cacher une infinité d'informations dans leurs décimales, infinité où l'on peut loger insidieusement tous les nombres premiers!

Peut-on, en respectant cette nouvelle contrainte, trouver une formule qui donne tous les nombres premiers? Si on ne peut pas les obtenir tous dans l'ordre, on se contenterait de les avoir dans le désordre, avec des répétitions, ou même d'en avoir une infinité.

Ce qu'on a vu au début montre qu'on ne réussira qu'avec un symbolisme un peu plus riche que celui des polynômes. Proposons d'accepter le symbolisme naturel suivant considéré comme banal en algèbre et en arithmétique :

- $[x]$ partie entière de x , définie comme l'arrondi à l'entier inférieur de x (déjà utilisée plus haut) ;
- $\sum$, pour la somme généralisée ; exemple $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$
- $!$, la notation factorielle définie par $n! = n(n-1)(n-2)\dots 4.3.2.1$;
- $||$ la valeur absolue, définie par $|n| = n$ si $n \geq 0$ et $|n| = -n$ si $n \leq 0$.

Il est maintenant possible de trouver des formules qui ne « trichent pas ». Le premier exemple est une formule qui donne tous les nombres premiers et qui pourtant comporte 37 symboles :

$$t(n) = 2 + n[1/(1 + \sum_{p=2}^{n+1} [(n+2)/p - [(n+1)/p]])] \quad n \geq 0$$

Le fonctionnement de cette formule, due à Roland Yélehad, s'explique en quelques mots. Si $n+2$ est un multiple de p , alors $(n+2)/p$ est un entier q , et donc $(n+1)/p = q - 1/p$. Il en résulte que $[(n+1)/p] = q - 1$ et que $[(n+2)/p - [(n+1)/p]]$ est égal à 1. En revanche, si $n+2$ n'est pas un multiple de p ,

2. JUSTIFICATION D'UNE FORMULE POUR P_n

$P(i) = [((i-1)! + 1) / i - [(i-1)! / i]]$; $P(i)$ vaut 1 si i est premier.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0

$P_i(m) = \sum_{i=1}^m P(i)$; $P_i(m)$ est le nombre de nombres premiers $\leq m$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7

$P_i(m) / n$

$\frac{m}{n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7
2	0,5	1	1	1,5	1,5	2	2	2	2	2,5	2,5	3	3	3	3	3,5	3,5
3	0,33	0,66	0,66	1	1	1,33	1,33	1,33	1,33	1,66	1,66	2	2	2	2	2,33	2,33
4	0,25	0,5	0,5	0,75	0,75	1	1	1	1	1,25	1,25	1,5	1,5	1,5	1,5	1,75	1,75
5	0,2	0,4	0,4	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,8	1	1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,4	1,4
6	0,16	0,33	0,33	0,5	0,5	0,66	0,66	0,66	0,66	0,83	0,83	1	1	1	1	1,16	1,16

$[P_i(m) / n]$; $[a]$ donne la valeur entière du nombre a

$\frac{m}{n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7
2	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

$\min([P_i(m)/n], 1) = g(n, m)$; $\min(x, y) = (x + y - |x - y|) / 2$
min donne le minimum des nombres entre ().

$\frac{m}{n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$g(n, m-1)$.

$\frac{m}{n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$g(n, m) - g(n, m-1)$.

$\frac{m}{n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

$m(g(n, m) - g(n, m-1))$. $p_n = \sum_{m=2}^{n+1} m(g(n, m) - g(n, m-1))$.

$\frac{m}{n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	0