

7. a^b EST DIOPHANTIN

La découverte de Matiassevitch en 1970, qui résout le dixième problème de Hilbert, fut le couronnement d'une longue série de progrès commencée par la formulation, dans les années 1930, d'une définition de la notion générale d'algorithmes par A. Church et A. Turing : pour démontrer qu'aucun algorithme ne peut traiter le problème des équations diophantiennes, il faut d'abord disposer d'une définition satisfaisante de la notion d'algorithme !

De nombreuses avancées conduisirent à une situation en 1970 où, pour établir l'indécidabilité du dixième problème de Hilbert, seule restait à prouver que a^b est diophantien, c'est-à-dire qu'il existe une équation $P(a, b, c, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, P polynôme, possédant des solutions entières $x_1, x_2, \dots, x_n$, si et seulement si $a^b = c$.

Ce problème en apparence élémentaire est en fait extrêmement difficile. Comme le caractère diophantien de a^b entraîne l'existence d'un polynôme dont les valeurs positives sont les nombres premiers – chose jugée invraisemblable à l'époque – nombreux furent les mathématiciens (dont le grand logicien polonais Alfred Tarski) qui concluaient à tort que a^b n'était pas diophantien.

Le jeune mathématicien Youri Matiassevitch, alors chercheur à l'Institut Sketlov de Leningrad, travailla avec obstination plusieurs années de suite sur la preuve du caractère diophantien de l'exponentielle. Il crut avoir trouvé une solution, mais, au moment même où il en faisait l'exposé devant ses collègues, il découvrit une erreur. Enfin il trouva seul une solution, au début du mois de janvier 1970. Quelques jours avant sa découverte, absorbé dans des pensées qui allaient résoudre un problème vieux de 70 ans, il avait quitté la soirée de fête du Nouvel An en enfilant par distraction le manteau de son oncle, d'une taille franchement inadéquate...

LE DIXIÈME
PROBLÈME DE HILBERT

Pourtant ce sont les mathématiciens professionnels, à l'occasion d'un défi lancé par David Hilbert en 1900, qui ont obtenu le plus surprenant résultat concernant les formules simples définissant l'ensemble des nombres premiers.

Le problème posé par David Hilbert en 1900 (parmi 23 problèmes) était de trouver une méthode générale et systématique pour étudier les équations diophantiennes, c'est-à-dire les équations polynomiales à coefficients entiers, comme l'équation $X^2 + Y^3 = Z^5$. On savait que la recherche des solutions entières de ce type d'équations était difficile ; Hilbert pensait d'ailleurs qu'aucune méthode systématique n'existait. La démonstration de cette conjecture sera terminée en 1970 par le mathématicien Youri Matiassevitch, qui prouva qu'une certaine équation polynomiale paramétrée ne pouvait pas être résolue pour toutes les valeurs de ses paramètres à l'aide d'une seule méthode (autrement dit, à l'aide d'un seul algorithme).

Le travail fait pour élaborer cette équation aboutissait à une autre conclusion remarquable : à tout ensemble de nombres entiers dont les éléments peuvent être énumérés par un programme (l'ensemble des nombres premiers en est un) correspond une fonction polynôme dont les valeurs positives, lorsque les variables prennent des valeurs positives, constituent exactement les éléments de cet ensemble. Il existe donc une fonction polynôme (à plusieurs variables) qui, lorsque les variables prennent des valeurs positives, prend des valeurs positives et négatives, l'ensemble de celles qui sont positives étant exactement l'ensemble des nombres premiers.

Cela ne contredit pas les énoncés cités au début, qui indiquaient seulement que ne pouvait exister une fonction polynôme à plusieurs variables qui, lorsque ses

variables prennent des valeurs positives, ne prend que des valeurs positives, l'ensemble des valeurs prises étant exactement l'ensemble des nombres premiers.

L'écart entre le résultat positif et le résultat négatif est mince comme une feuille de papier à cigarette et, à vrai dire, a profondément étonné les mathématiciens. Il fallut sept ans pour que le polynôme dont l'existence résulte du résultat de Matiassevitch soit élaboré explicitement et publié en 1976 par J. Jones, D. Sato, H. Wada et D. Wiens. Le voici : $(1 - (vz + h + j - q)^2 - ((gk + 2g + k + 1)(h + j) + h - z)^2 - (2n + p + q + z - e)^2 - (16(k + 1)^3(k + 2)(n + 1)^2 + 1 - f^2)^2 - (e^3(e + 2)(a + 1)^2 + 1 - o^2)^2 - ((a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2)^2 - (16r^2y^4(a^2 - 1) + 1 - u^2)^2 - ((a + u^2(u^2 - a))^2 - 1)(n + 4dy)^2 + 1 - (x + cu)^2)^2 - (n + l + v - y)^2 - ((a^2 - 1)^2 + 1 - m^2)^2 - (ai + k + 1 - j)^2 - (p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m)^2 - (q + y(a - p - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x)^2 - (z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1 - pm)^2)(k + 2)$.

Quand les 26 variables $a, b, c, \dots, z$ prennent toutes les valeurs de l'ensemble des nombres entiers positifs, l'expression prend des valeurs positives et négatives. L'ensemble des valeurs positives prises est l'ensemble des nombres premiers.

L'éminent mathématicien soviétique You Linnik, à qui un collègue apprenait l'existence de ce polynôme inattendu,

s'écria : «C'est merveilleux, très bientôt nous allons sans doute apprendre une quantité de choses nouvelles sur les nombres premiers.» On lui précisa alors qu'il existait un polynôme analogue pour tout ensemble de nombres énumérables par programme. «C'est lamentable, dit alors Linnik. Très probablement nous n'allons rien apprendre de nouveau sur les nombres premiers.»

Il est vrai que le polynôme est très décevant, car il ne prend que très rarement des valeurs positives (les seules intéressantes !) et, à moins d'étudier soigneusement la façon dont il a été construit, on ne réussit à tirer aucun nombre premier de ce polynôme qui, en théorie, les donne tous ! Il y a quelques années, je l'avais mentionné dans cette chronique, et plusieurs lecteurs m'avaient fait part de leur désillusion et même de leur doute concernant les propriétés annoncées. Je veux les rassurer : il n'y a aucune erreur, le polynôme possède bien les propriétés annoncées, mais il n'est pas plus utile pour calculer les nombres premiers que la formule de Willans. Les formules vraiment utiles, répétons-le, correspondent à des programmes et, parce qu'on ne leur impose pas un carcan artificiel par limitation du symbolisme, sont efficaces.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille. e-mail : delahaye@lil.fr

Une feuille de calcul *Maple* associée à cet article, rédigée par Eric Wegrzynowski, est mise à la disposition des lecteurs à l'adresse : <http://www.lil.fr/~wegrzyn/FormPrem.html>.

C. BOXA, *A Note on Diophantine Representation*, in *The American Mathematical Monthly*, pp. 138-143, février 1993.

C. CALDWELL, *The Prime Pages*. <http://www.utm.edu/research/primel/>.

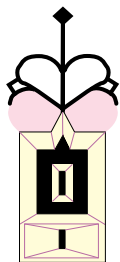
G. HARDY et E. WRIGHT, *An Introduction*

to the Theory of Numbers, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, cinquième édition, 1979.

Y. MATIASSEVITCH, *Le dixième problème de Hilbert. Son indécidabilité*, Masson, Paris, 1995.

P. RIBENBOIM, *Nombres premiers : mystères et records*, Presses universitaires de France, 1994.

Le secret des nombres (arithmétique pour l'enseignement de spécialité de terminale S), ouvrage collectif des Éditions Archimède, ISSN 0987-0806, *Tangente*, hors série n° 6, 1998.



Fractales africaines

L'urbanisme et l'architecture de certains villages africains sont fondés sur les mathématiques des fractales.

On ne compte plus les formes qu'expliquent la géométrie fractale, ces courbes invariantes quelle que soit l'échelle d'observation. : un détail agrandi est identique à l'ensemble dont il est issu. Les mystères de la forme des nuages, du dessin du littoral, de la structure d'un flocon de neige ou des fluctuations boursières sont aujourd'hui résolus grâce à cet outil mathématique. Ron Eglash, de l'Université de l'Ohio, nous propose d'explorer l'urbanisme et l'architecture africains par une analyse fractale.

Le village de Logone-Brini, au Cameroun a été construit par les Kotoko, un peuple qui vit de part et d'autre du fleuve Niger, à partir d'un motif de base rectangulaire que l'on retrouve aussi en tant que symbole royal dans l'emblème (voir la figure à gauche du titre). R. Eglash explique l'organisation du palais royal (voir la figure 4) par un motif

fractale construit par la répétition d'une opération géométrique élémentaire : sur une fraction des côtés d'un rectangle initial, on construit un rectangle aux proportions identiques. Puis, à nouveau sur les quatre rectangles, 16 rectangles sont formés (voir la figure 4). Le résultat est une « grille », composée des côtés de 20 rectangles, sur laquelle on peut superposer le plan du palais royal.

Par ailleurs, de l'entrée du palais à la chambre du trône, un visiteur parcourt une spirale rectangulaire, nommée *Chemin de lumière* (voir la figure 3), dont les côtés diminuent régulièrement après chaque angle. Au fur et à mesure de sa progression – à chaque changement d'échelle – le visiteur adopte un langage plus poli et plus respectueux. Parvenu dans la chambre du trône, il n'a plus ses chaussures et son langage est particulièrement précis et codifié.

On retrouve également une forme fractale dans la structure d'un village Ba-ila en Zambie (voir la figure 6). Le motif initial est ici une courbe circulaire non fermée dans laquelle est inscrit un segment rectiligne. Le motif est découpé en zones « actives » qui seront remplacées par un motif identique – mais réduit – à celui de départ. La même opération est répétée sur chacune des zones « actives » du nouveau motif. Le résultat rend bien compte de la structure globale du village

L'architecture n'est pas le seul domaine où l'on rencontre des fractales. Il en existe, par exemple, dans les textiles, l'artisanat et les coiffures traditionnelles africains. Jusqu'à aujourd'hui, les mathématiques des fractales expliquaient surtout des phénomènes naturels ; elles sont maintenant repérées dans des constructions de l'homme tels les mandalas tibétains qui représentent l'Univers.



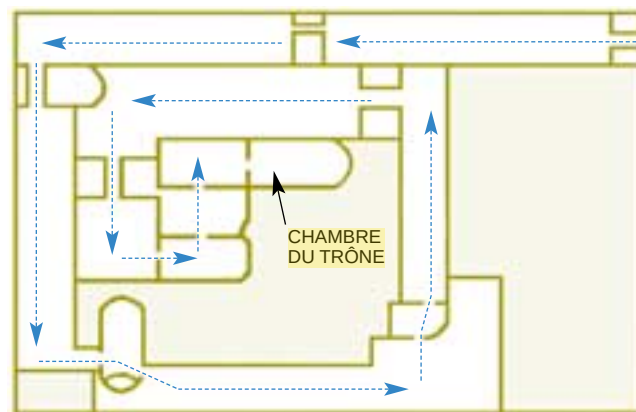
Courtesy Musée de l'homme, Paris

1. VUE AÉRIENNE du Palais royal du village de Logone-Brini. Au centre, les chambres utilisées par le roi, et la chambre du trône.

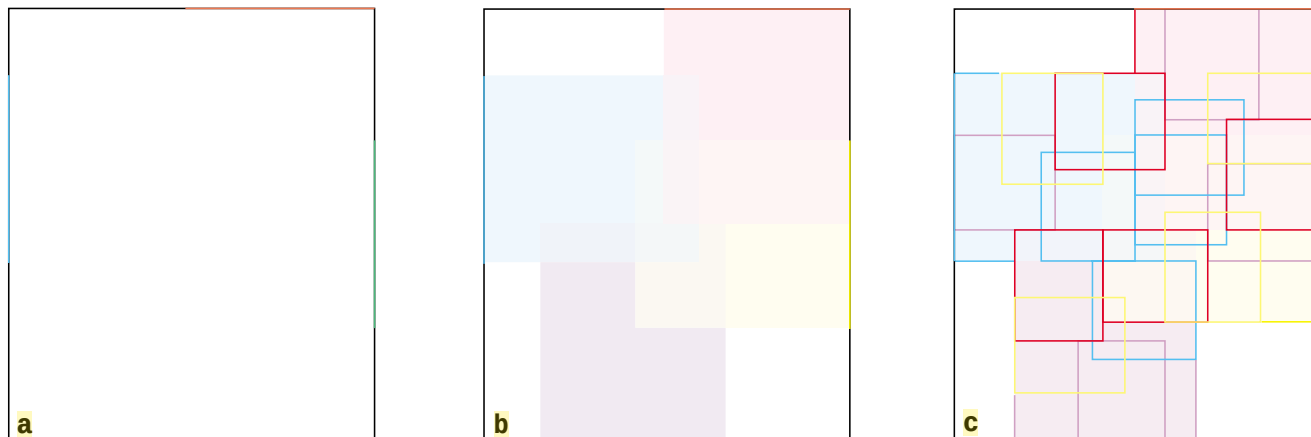


Ron Eglash

2 LES TOITS des loges royales.

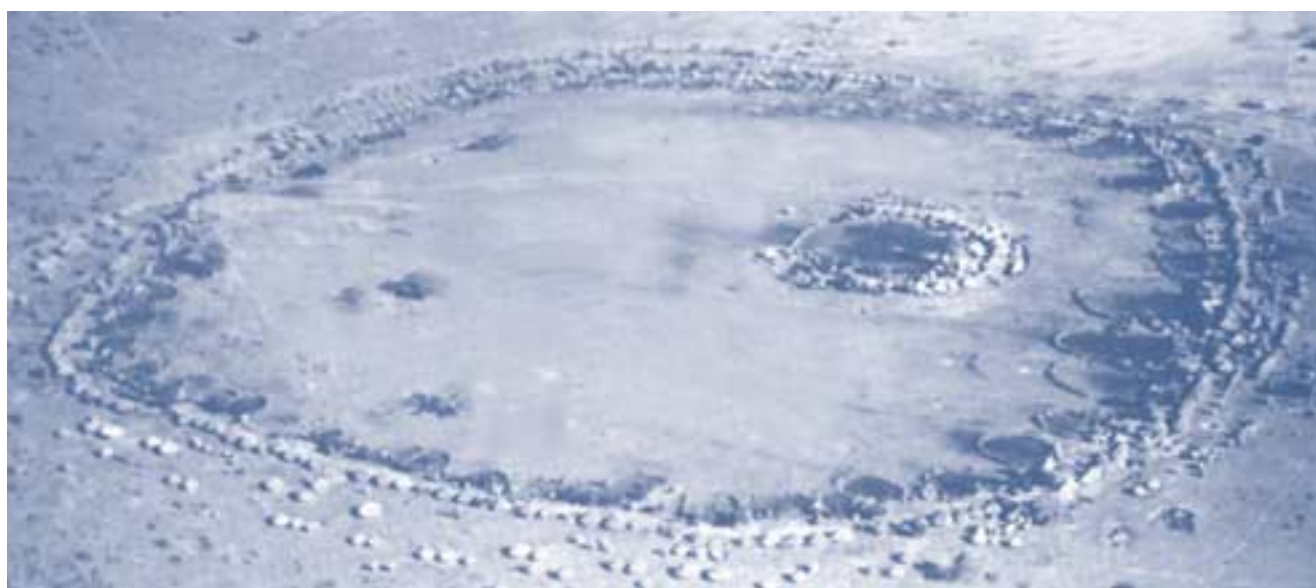


3. LE CHEMIN DE LUMIÈRE est une spirale rectangulaire que l'on parcourt avant de rencontrer le roi.



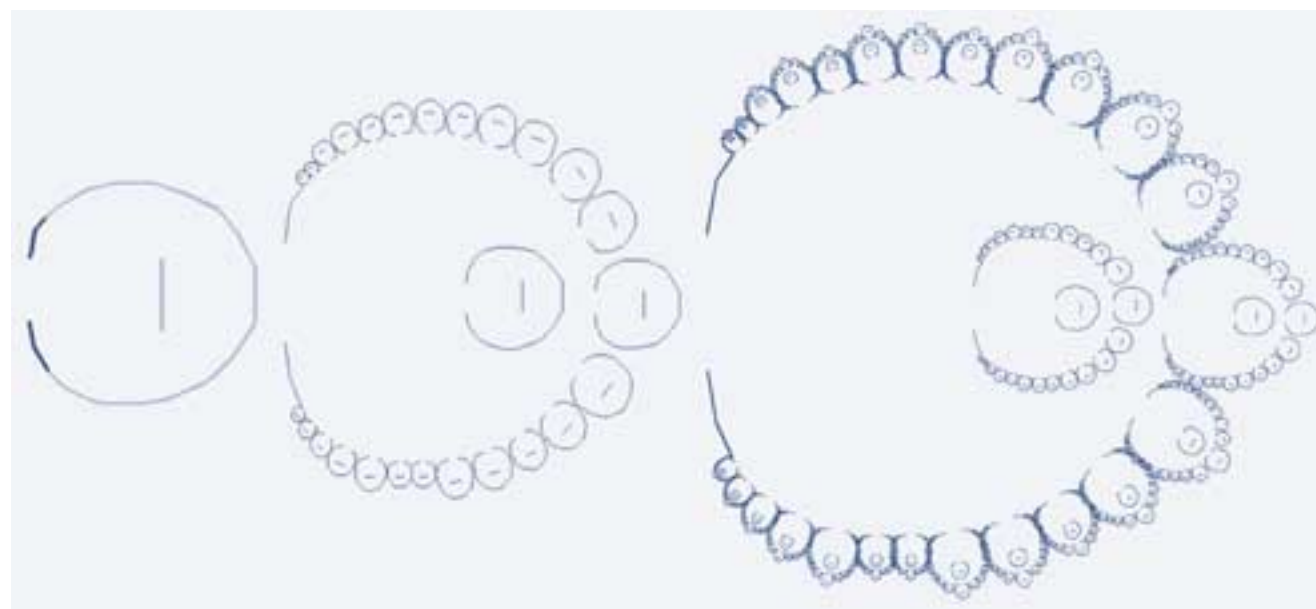
4. SUR LES QUATRE PARTIES COLORÉES des côtés du rectangle (a), on construit quatre autres rectangles aux proportions identiques (rectangles colorés sur la figure b). Puis, le même procédé est

appliqué sur chacun des nouveaux rectangles. Le résultat (c) est une «grille» constituée des côtés des rectangles formés, que l'on peut mettre en parallèle avec le plan du palais royal de Logone-Brini.



American Geographic Institute

5. VUE AÉRIENNE d'un village Ba-ila, en Zambie.



6. STRUCTURE FRACTALE DU VILLAGE. Le motif initial (à gauche) est répété sur les segments qui le composent. À nouveau, l'opération est effectuée sur les mêmes zones du motif créé (au milieu). Le résultat (à droite) est similaire à la vue d'ensemble du village.

Archéologie

Sphinx! Le Père la terreur. Histoire d'une statue

Christiane Zivie-Coche.
Éditions Noésis, 1997.

Le sphinx de Gizeh est un inconnu célèbre : croirait-on qu'il ait fallu attendre 1979 pour qu'il en soit dressé un relevé exact ? Sa notoriété même, et l'utilisation commerciale qui en est faite, éclipsent sa véritable nature ; ses gigantesques proportions font oublier le contexte archéologique qui lui donna un sens ; la hâte destructrice des premiers fouilleurs nous a privés des moyens d'apprécier certaines étapes de son histoire. Nature, contexte et histoire du sphinx de Gizeh : ce sont ces trois points que l'auteur, prenant acte de cet état de fait, a voulu exposer dans ce passionnant petit livre, inspiré par une démarche scientifique exemplaire, mais rédigé sous une forme accessible à tous.

Le monument n'est autre, à l'origine, qu'une statue du pharaon Khéphren, de la IV^e dynastie, bâtisseur de la deuxième pyramide de Gizeh (2570-2540 avant notre ère) ; une statue certes gigantesque (72,55 mètres de long pour 20 mètres de haut), mais dont les proportions sont en harmonie avec la majesté du site et la taille des monuments voisins. Il constitue, à l'époque de sa construction, un élément du complexe funéraire de Khéphren, avec le temple dit «du Sphinx», qui le précède à l'Est, et le temple d'accueil de la chaussée montante, plus au Sud. Associant le corps d'un lion au visage du roi, sa fonction, en vertu d'une symbolique transparente, est d'exprimer l'assertion suivante : Khéphren est puissant comme un lion.

Unique en son genre, le sphinx de Gizeh devait être rétrospectivement le précurseur et le modèle d'un type favori du répertoire de la statuaire royale égyptienne – l'hybride à corps de lion et tête humaine –, qui n'apparaît cependant que cinq siècles et demi plus tard, à la XII^e dynastie. Notons qu'il n'existe apparemment pas, en égyptien ancien, de nom pour cette entité composite. *Sphinx* est un mot grec, comme «obélisque» ou «pyramide» ; il fut sans doute attribué par les Grecs à l'hybride de Gizeh par analogie avec le monstre de Béotie mis en défaut par Œdipe.

Le culte du sphinx disparut avec la christianisation de l'Égypte. Légendes

et superstitions firent alors de cet être fabuleux, gardien de trésors enfouis, le démon *Balhoubà*, d'où son nom arabe d'*Aboul' Hôl*, «père la terreur». Bien qu'une légende tenace rapporte, selon les versions, aux canons des soldats de Bonaparte ou aux mousquets des Mamelouks la destruction du nez de la statue, c'est plutôt la ferveur religieuse qui fut probablement la cause de cette mutilation, que l'archéologue américain Mark Lehner situe entre le X^e et le XV^e siècle. Les traces que porte la statue montrent que deux barres à mine furent insérées à coups de masse à la racine du nez et sous sa narine droite, puis servirent de levier pour le décoller du visage.

Les premières fouilles de l'époque moderne furent celles de Caviglia (1817), qui, dégagant la poitrine du sphinx du sable qui l'enfouissait jusqu'au cou, atteignit le sol d'origine entre ses pattes, découvrant la «Stèle du Songe» de Thoutmosis IV, dont nous reparlerons. Entre 1853 et 1858, Mariette dégagait l'ensemble du monument et découvrit, au Sud, le temple d'accueil du complexe funéraire de Khéphren. En 1885-1886, Maspero dut faire à son tour débayer la zone du sable qui de nouveau menaçait de l'envahir. Ce problème récurrent ne devait être résolu qu'au XX^e siècle, avec les grands travaux d'Émile Baraize (1925-1936) et de Sélim Hassan (1936-1938), qui désensablèrent complètement la zone du sphinx et permirent de réparer le monument.

C'est à cette occasion que furent découverts le temple dit «du sphinx», qui le borde à l'Est, et, sur la plate-forme

rocheuse qui le surplombe au Nord-Est, la chapelle édifée par Amenhotep II pour abriter la stèle commémorant ses travaux de restauration. Des menaces récentes d'infiltration et de pollution ont provoqué, en 1979-1983, le premier relevé complet du monument.

Proposant une synthèse de ces divers travaux, Christiane Zivie-Coche montre que l'histoire du sphinx de Gizeh se divise en deux parties très inégales, séparées par un hiatus de six siècles et demi. La première, d'environ 350 ans (2540-220), va de la construction du monument à la fin de l'Ancien Empire ; l'autre, de près de deux millénaires (de 1550 avant notre ère à 395 de notre ère), du début du Nouvel Empire à la fin du paganisme.

Au cours de la première période, le sphinx fut un élément du complexe funéraire de Khéphren. Devant lui fut édifé le temple du sphinx, dont le plan, centré sur une cour péristyle à ciel ouvert, évoque celui d'un sanctuaire solaire. Comme son axe principal ne correspond pas à celui du sphinx et qu'il n'y a pas de communication directe avec celui-ci, on doute qu'ils aient été cultuellement associés.

Abandonné au Moyen Empire, alors même que le type du sphinx devient un thème favori de la statuaire royale, le sphinx n'est redécouvert qu'après 650 ans d'oubli, lorsque le plateau de Gizeh connaît un renouveau en raison de l'essor de la ville voisine de Memphis, véritable capitale de l'Égypte et siège de la monarchie. Les rois, qui utilisent alors la partie de désert entre Saqqara et Gizeh comme terrain de chasse et site d'entraînement pour leurs exercices militaires, redécouvrent les pyramides et le sphinx, probablement ensablé jusqu'au cou, comme au début du siècle dernier.

Sa nature originelle étant depuis longtemps oubliée, le monument est alors réinterprété comme l'image d'un dieu jusque-là inconnu, *Hor-em-akhet*, «Horus-dans-l'horizon», dont il représente la seule manifestation visible et dont le nom est mieux connu sous sa forme grécisée d'Harmakhis. Le site, qui n'est plus employé comme nécropole, devient un lieu de pèlerinage dont ce dieu nouveau est justement le foyer. Le «Village de Ro-Sétaou», qui s'étend en contrebas, à l'emplacement de l'actuel Nazlet el-Samman, tire bientôt sa fortune de la fabrication et de la vente d'objets votifs aux pèlerins, de la même manière que sa contrepartie moderne vit aujourd'hui du tourisme.

En l'absence de textes explicites, on ignore tout de la théologie et du culte d'Harmakhis. La signification de son nom



Relevé du sphinx de Gizeh lors des expéditions d'Égypte.

Bibliothèque nationale de France