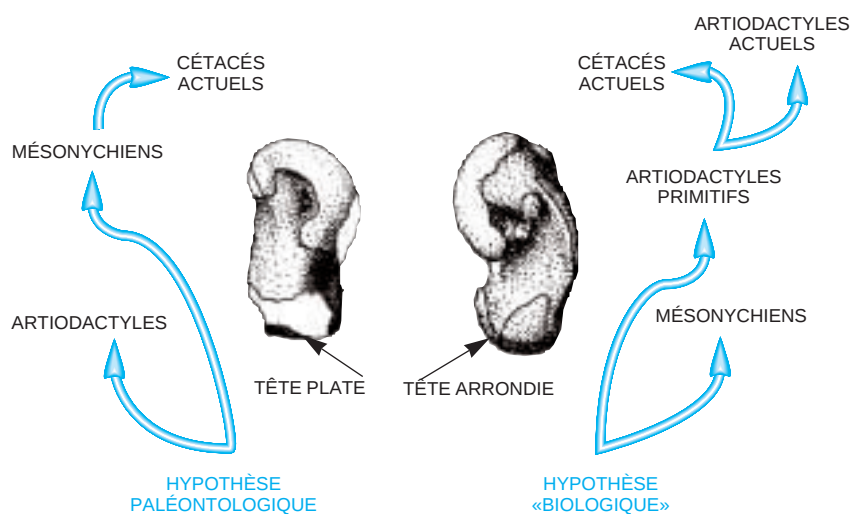




John Klausmeyer

L'*Ambulocetus* est une baleine primitive dont on a retrouvé des os de chevilles (astragale) fossilisés âgés de 50 millions d'années. L'anatomie comparée de ces os (os de gauche) avec ceux d'artiodactyles (os de droite), tels les hippopotames actuels, incite à penser que les mésonychien sont les ancêtres des cétacés actuels (arbre de gauche). Une autre hypothèse indique que les artiodactyles primitifs seraient les ancêtres des baleines (arbre de droite).

ancêtre commun. Récemment, au Pakistan, l'équipe de Hans Thewissen, de l'Université de l'Ohio, a mis au jour deux os fossilisés qui confirment en partie la théorie des paléontologues.

Les fossiles sont des astragales de chevilles de baleines primitives, telles que *Ambulocetus* (voir la figure) vivant il y a 50 millions d'années. La tête arron-

die des os découverts diffère des astragales des artiodactyles et renforcent la théorie des mésonychien ; néanmoins, deux facettes articulaires correspondent à celles que l'on trouve chez les artiodactyles. Les paléontologues s'interrogent. J. Thewissen, pense que les fossiles n'appartiennent vraisemblablement pas à un artiodactyle, mais n'ap-

partiennent sans doute pas non plus à un mésonychien.

Les biologistes moléculaires ont comparé les génomes de cétacés avec ceux de différents artiodactyles encore vivants. Les derniers résultats contredisent les données paléontologiques et montrent que l'hippopotame est l'artiodactyle le plus proche des cétacés. Tout deux auraient un ancêtre commun.

Mark Uhen, de l'Institut de Cranbrook, remarque que les artiodactyles peuvent être les animaux terrestres vivants les plus proches des mammifères marins, sans en être les ancêtres. En outre, les paléontologues indiquent que les résultats d'analyses génétiques sont biaisés car les similarités constatées ne reflètent peut-être que des évolutions convergentes, plutôt que l'existence d'un ancêtre commun.

William Sanders, de l'Université du Michigan, remarque par ailleurs que les plus vieux fossiles d'hippopotames connus sont âgés d'environ 18 millions d'années, alors que les plus vieilles baleines datent de plus de 50 millions d'années. Un ancêtre commun aurait donc subsisté plus de 32 millions d'années sans laisser de traces. De plus, la dentition et la forme du crâne des baleines ne correspondent pas à celles des artiodactyles.

L'issue du débat reste confuse. D'une part, aucun fossile de mésonychien ne contient d'ADN suffisamment intact pour se prêter à des analyses comparées fiables. D'autre part, les morphologies des fossiles ne sont pas assez convaincantes. Seul un fossile de mésonychien bien conservé permettrait de trancher.

Lignes de billes

Peut-on aligner des billes sur une ligne de façon que quatre d'entre elles soient à coup sûr non équidistantes ?

Cela ressemble à la règle d'un jeu pour les enfants. Deux joueurs disposent de billes, et chacun à son tour, ils en posent une sur une ligne. La condition imposée est qu'aucun groupe de trois billes choisies au hasard ne doit être formé de billes équidistantes (dans ce cas, aucune bille centrale de triplets ne doit être au milieu des deux autres). Est-ce que deux enfants peuvent jouer indéfiniment ?

Avec cette seule condition, la réponse est affirmative. Par exemple, lorsque d est la distance qui sépare les deux

premières billes, le joueur suivant place la troisième à une distance égale à $2d$ de la deuxième, puis à $2^2d = 4d$ de la troisième, puis à $2^3d = 8d$, et ainsi de suite. Aucun triplet ne sera composé de billes équidistantes. Cependant, dans ce cas de figure, les billes sont de plus en plus espacées, et la densité, nommée δ , c'est-à-dire le rapport du nombre de billes posées entre la première et la dernière sur le nombre total de billes que l'on pourrait poser, tend vers zéro à mesure que le jeu se déroule.

Imposons donc une nouvelle condition : la densité ne doit pas être nulle à l'infini. Les enfants peuvent-ils encore jouer indéfiniment ? La réponse est négative, il y a un nombre limité de billes à jouer qui dépend de la densité que les joueurs se sont imposé. En 1998,

Pour une densité différente de zéro, il existe un nombre limite de billes ne contenant aucun couple de billes équidistantes choisies parmi quatre.

le mathématicien Tim Gowers, de l'Université de Cambridge, a reçu la médaille Fields (le «prix Nobel» des mathématiciens) notamment pour le calcul du nombre limite de billes ne contenant, cette fois, aucun groupe de quatre billes équidistantes. Nous verrons que ses travaux concernaient des nombres et non des billes.

En 1936, les mathématiciens hongrois P. Erdős et G. Turan ont conjecturé que pour une densité δ donnée, il existait un nombre limite N de billes à poser tel que k billes prises au hasard ne soient pas

équidistantes. En 1953, K. Roth a calculé le nombre maximal de billes que l'on peut poser avec une densité δ , de façon qu'aucun triplet prélevé au hasard ne soit composé de billes équidistantes. Ce nombre est très élevé ; les enfants joueront quelques semaines en posant une bille par seconde !

T. Gowers a calculé récemment le nombre limite de billes qui ne contient pas quatre billes équidistantes, en fonction de la densité δ . L'intérêt de sa méthode réside dans son application possible pour des groupes de billes plus importants. Le calcul du nombre limite de billes ne contenant pas de groupe de plus de quatre billes est aujourd'hui en cours de vérification.

Laissons les billes aux enfants. Ces résultats intéressent les mathématiciens

lorsque la ligne de jeu est remplacée par l'ensemble des entiers naturels et les billes par des entiers. Des billes équidistantes signifient alors des nombres successifs d'une suite arithmétique où l'on calcule un terme en ajoutant une constante au précédent (par exemple, la suite 4, 9, 14, 19, 24,...). Le résultat de T. Gowers indique que dans la suite des entiers de 1 à N où N est supérieur à la limite calculée, chaque sous-ensemble de δN nombres contient au minimum une suite arithmétique de quatre termes. Anodin en apparence, ce résultat est le premier pas dans la résolution d'un problème soulevé par P. Erdős : l'ensemble des nombres premiers (divisibles uniquement par 1 ou par eux-mêmes) contient-il des suites arithmétiques de longueur quelconque ?

Nouveau regard sur des fards

Il y a 4 000 ans, les Égyptiens synthétisaient des cosmétiques à usage thérapeutique.

Un trait de maquillage noir qui souligne et allonge l'œil : la fréquence de cette caractéristique sur les portraits peints et sculptés dans l'Égypte ancienne y témoigne de l'importance du maquillage. Des tombes ont effectivement livré des coffrets de toilette qui contenaient, outre des miroirs, des épingles à cheveux et des stylets, des récipients encore remplis de poudres colorées. Les Égyptiens se maquillaient avec des fards verts, blancs, gris ou noirs, mélanges de minéraux colorés et de matières grasses. Outre des préoccupations esthétiques, ces produits avaient des fonctions thérapeutiques, qui motivaient des procédés de fabrication longs et complexes.

Le Musée du Louvre conserve, dans ses collections égyptiennes, de nombreux flacons à fard, en pierre, de roseau ou en bois, qui pouvaient contenir 50 à 100 grammes de poudre. Notre équipe, en collaboration avec la Source européenne de rayonnement synchrotron (ESRF) à Grenoble, a caractérisé les constituants des poudres cosmétiques noires contenues dans 49 de ces flacons, datés de 2000 à 1200 avant notre ère.

La microscopie électronique et la diffraction des rayons X révèlent que la couleur noire est due à la présence de galène (sulfure de plomb). La teinte est parfois éclaircie par de la cérusite, carbonate de plomb blanc.

La plupart des produits analysés contiennent aussi en abondance deux chlorures de plomb, la laurionite et la phosgénite. Ces minéraux ont été introduits intentionnellement par les fabricants : le bon état de conservation des poudres exclue une formation par des phénomènes d'altération lors du vieillissement des produits. Par ailleurs, ils ont été synthétisés : leur rareté naturelle aurait empêché les Égyptiens de les inclure dans des cosmétiques pendant plusieurs siècles comme ils l'ont fait. Enfin, la présence de laurionite et de phosgénite n'a certainement pas de motivations esthétiques : ces minéraux sont blancs et ils sont la plupart du temps associés à la cérusite, blanche aussi et beaucoup plus facile à se procurer. Les Égyptiens les ont-ils donc synthétisés pour conférer aux fards des propriétés particulières ?

Cette présomption est renforcée à la lecture de recettes de produits médicaux, décrites par Dioscoride et Pline l'Ancien au I^{er} siècle de notre ère. Ils décrivent, en particulier, comment l'«écume d'argent purifiée» (l'oxyde de plomb) était broyée et mélangée dans de l'eau avec du sel gemme et parfois du natron (des carbonates de sodium principalement), puis filtrée ; la procédure était répétée chaque jour pendant plusieurs semaines. Lorsque nous avons suivi ce mode opératoire et mélangé de l'oxyde de plomb et du chlorure de sodium dans de l'eau, une lente réaction a produit une solution basique que les remplacements quotidiens d'eau ont régulièrement neutralisée. Nous avons ainsi obtenu une très fine poudre de laurionite blanche. En présence de carbonates, on obtient, avec le même procédé, de la phosgénite. La préparation de tels composés par voie aqueuse met en jeu des réactions