



Matt Collins

4. Ces cylindres déformés correspondent respectivement aux pliages représentés en rouge, en vert et en orange sur la figure 3.

désigne ces pavages par leur symbole de Schläfli, qui note la nature des pavés autour de chaque sommet.

Par exemple, le nid d'abeilles est noté (6^3) : chaque sommet est à l'intersection de trois hexagones. Les deux autres pavages réguliers et uniformes sont notés (3^6) et (4^4) .

Les pavages uniformes semi-réguliers sont : $(3^4.6)$, $(3^3.4^2)$, $(3^2.4.3.4)$, $(3.4.6.4)$, $(3.6.3.6)$, (3.12^2) , $(4.6.12)$ et (4.8^2) . Par exemple, le pavage $(3.4.6.4)$ a, à chaque sommet, un triangle équilatéral, un carré, un hexagone et un autre carré (voir la figure 2). Dans la structure de Yoshimura, le pavé n'est pas un polygone régulier, de sorte qu'il n'est pas dans la liste. Il correspondrait à la formule (3^6) .

Quelles structures peuvent-elles être pliées selon les arêtes de polygones, de sorte que les faces polygonales restent parfaitement planes ? On peut certainement plier la structure (4^4) en pliant le papier selon des lignes horizontales seulement, ou selon des lignes verticales. Cependant on ne peut plier selon une ligne horizontale et selon une ligne verticale, parce que les pavés doivent se courber en dehors du plan où les plis se croisent.

En 1989, Koryo Miura a démontré qu'aucun pavage où trois arêtes se croisent à un sommet ne peut être plié, ce qui élimine les possibilités (6^3) , (3.12^2) , $(4.6.12)$ et (4.8^2) . Il est aisé de comprendre que les pavages $(3^4.6)$ et $(3.4.6.4)$ ne peuvent pas non plus être pliés.

Des droites traversent les pavages $(3.6.3.6)$ et (4^4) , qui peuvent être pliés selon ces lignes, mais, cette fois encore, les résultats sont peu intéressants. Il ne reste alors que les pavages (3^6) , $(3^3.4^2)$ et $(3^2.4.3.4)$, qui, non seulement peuvent être pliés, mais peuvent être enroulés en cylindre, comme la structure de Yoshi-

mura. Ce sont des pavages qui doivent retenir l'attention des ingénieurs.

En fait, ces trois pavages peuvent être pliés de plusieurs façons. La figure 3 montre quatre façons de plier le pavage $(3^2.4.3.4)$; les segments noirs indiquent les plis en relief, et les pointillés les plis en creux. La figure 4 représente les cylindres plissés correspondants.

La structure des lignes de pliage se répète, dans chaque cas, sur la totalité du plan. Les parallélogrammes coloriés de la figure 3 indiquent la cellule unité. La plus petite cellule unité possible (*en rouge*) a une superficie égale à deux carrés et trois triangles. L'un de ces carrés est coupé en deux parties qui se recolleraient en un carré si les bords opposés de la cellule unité étaient recollés. T. Tarnai suppose que c'est le seul motif de pliage possible dont la cellule unité contient deux carrés.

La deuxième cellule unité (*en vert*) contient quatre carrés, et l'on suppose aussi qu'elle est le seul pliage ayant cette particularité. La troisième cellule unité (*en bleu*) contient six carrés ; il existe plusieurs pliages de ce type, et je vous laisse en trouver d'autres. La dernière cellule unité (*en orange*) contient huit carrés, et il existe à nouveau plusieurs pliages de ce type. Je vous laisse également chercher les pliages correspondant à (3^6) et $(3^3.4^2)$.

Comme pour la structure de Yoshimura, certains pliages ressemblent à la surface obtenue par écrasement d'un cylindre réel. En outre, l'écrasement peut être modélisé par ordinateur ; il suffit de faire comme si les pavés plans du pavage sont liés par une sorte de matériau élastique. Les résultats sont utiles en architecture et en génie mécanique. C'est toujours un ravissement de voir comment ces mathématiques réconcilient un art ancien et une technique moderne.

- 1- plus de puissance de calcul
- 2- plus de puissance analytique
- 3- des documents plus élaborés
- 4- des graphiques plus étonnants
- 5- ajout de fonctions personnalisées
- 6- une interface visuelle intuitive
- 7- intégration Web
- 8- compatible Windows 95,98,NT

Mathcad 8

Offre de lancement:
Mathcad 8 + Treasury 8

3 750 Fht
au lieu de 4 540 Fht

French version !!!
by
SIGMA PLUS

Distributeur officiel
MATHSOFT

. licence d'entreprise
. support technique
. formation-conseil-études



29 rue Lauriston
75016 PARIS
Tél: 01 44 34 80 00
Fax: 01 44 34 80 01
mathcad@sigmaplus.fr
www.sigmaplus.fr

Tél : 01 44 34 80 00



Les découpages artistiques

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les amateurs perspicaces et avisés découvrent encore aujourd'hui de nouvelles constructions géométriques.

Les découpages géométriques passionnent professionnels et amateurs. La gageure consiste à transformer, avec le nombre minimal de coups de ciseaux et en réarrangeant les morceaux, une forme en une autre. Le grand classique du découpage est l'ouvrage de Harry Lindgren *Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them*, paru en 1964, puis complété et republié en 1972. En dehors de sa passion pour la géométrie et son métier d'agent de brevets, Harry Lindgren fut jusqu'à sa mort, en 1992, l'ardent défenseur d'une réforme radicale de l'orthographe anglaise qu'il souhaitait fondée sur un système phonétique rigoureux. Que n'a-t-il fait école !

Depuis 1972, de nombreux ajouts ayant fait progresser l'art populaire des dissections, une nouvelle synthèse s'imposait. Le livre de Greg Frederickson paru récemment sous le titre *Dissection : Plane and Fancy* est le recueil attendu. Sa réalisation est d'une remarquable qualité, tant sur le plan des informations que l'auteur est allé rechercher patiemment dans toutes sortes de publications, pour la plupart inac-

cessibles, que pour les belles illustrations qui nous font découvrir à chaque page des constructions astucieuses et élégantes. Ce livre prouve que l'ingéniosité des amateurs de récréations mathématiques engendre des merveilles esthétiques et d'authentiques énigmes difficiles. Le découpage du croissant de lune en croix grecque et en carré (voir la figure 1) est un classique du genre perfectionné par les deux frères rivaux du découpage, Sam Lloyd (1841-1911) et Henry Dudeney (1857-1930).

Les thèmes du découpage des figures à bords arrondis et celui des polyèdres retiendront notre attention. Assez étrangement, les résultats généraux de M. Laczkovich, S. Banach et A. Tarski sur les découpages ensemblistes utilisant l'axiome du choix ne sont pas mentionnés dans le livre de G. Frederickson, qui n'a voulu retenir que les découpages effectifs. Nous les évoquerons.

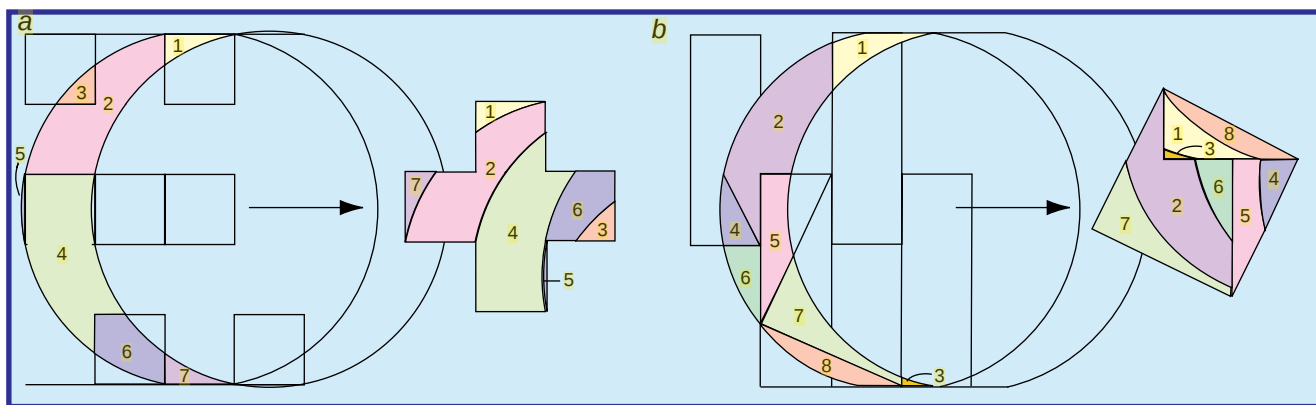
Il est évident que, si en découpant un polygone A en un nombre fini de morceaux polygonaux et en les recombinaisonnant, on reconstitue un polygone B , alors les polygones A et B ont des aires égales. Moins évidente est la propriété réciproque :

si deux polygones A et B ont des aires égales, alors on peut toujours découper le premier en un nombre fini de polygones qui se recombinaisonneront pour former le second. C'est le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein (démontré indépendamment plusieurs fois au XIX^e siècle) : deux polygones sont décomposables par dissection polygonale, si et seulement si, ils ont la même aire (voir la figure 2).

La démonstration générale donne des découpages comprenant un trop grand nombre de pièces, aussi en cherche-t-on d'autres plus économiques. C'est la source d'une multitude de casse-tête géométriques : les records sont régulièrement battus, parfois au grand dam des spécialistes qui pensaient impossible d'améliorer leur solution !

Tel est le cas de la transformation proposée par Lindgren du décagone en carré, qui était déjà miraculeusement réalisée avec huit pièces seulement et que l'amateur anglais Gavin Theobald améliora en un découpage de sept pièces (voir la figure 3).

Lorsque l'on considère non plus des polygones mais des figures à bords



1. Transformations du croissant de lune. Le dessin a donne une solution en sept pièces de la transformation du croissant en croix grecque. Le croissant de lune utilisé possède une hauteur égale à cinq fois la largeur. La construction résulte d'une correction apportée par G. Frede-

rickson à une solution inexacte proposée par Sam Lloyd. Le croissant de lune auquel s'intéressa H. Dudeney est légèrement différent : sa hauteur est égale à quatre fois sa largeur. Le dessin b montre un découpage en huit pièces du croissant de Lloyd conduisant au carré.