

curvilignes, par exemple des arcs de cercles (voir la figure 4), le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwein n'assure plus qu'un découpage existe, et il faut y croire pour réussir...

Pourtant l'idée des «découpages-recompositions» était une des méthodes utilisées par les Grecs pour «quarrer» des surfaces à bords curvilignes. «Quarrer» une aire signifie la calculer en ramenant la figure initiale à celle d'un carré. Ces figures aux bords curvilignes qu'on peut quarrer étaient appelées des lunules, et les Grecs savaient que certains découpages étaient difficiles, voire impossibles.

DEUX QUADRATURES DU CERCLE

Le fameux problème de la quadrature du cercle est attribué à Anaxagore. Alors qu'il était emprisonné pour avoir soutenu que la Lune ne faisait que refléter la lumière du Soleil, il se serait posé, il y a 25 siècles, la question de mettre en relation un cercle et un carré de même aire. On peut interpréter l'expression *quadrature du cercle* de deux façons différentes. La première, que nous appellerons le problème classique de la quadrature du cercle, se formule ainsi : est-il possible, en n'utilisant que la règle et le compas, de tracer un carré de la même aire qu'un cercle donné ?

Résoudre le problème équivaut à tracer à la règle et au compas un segment de longueur π à partir de la donnée d'un segment de longueur 1, ce qui ne serait possible que si π était exprimable par radicaux carrés (comme $\sqrt{2} + \sqrt{5}/1 + \sqrt{17}$). Cela impliquerait que π est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, ce qui n'est pas le cas, puisque π est un nombre transcendant, comme Ferdinand von Lindemann l'a prouvé en 1882.

La seconde interprétation, que nous dénommerons problème de la quadrature du cercle par découpages, est la suivante : est-il possible de découper un cercle (on devrait dire un disque) en un nombre fini de morceaux – auxquels on n'impose pas d'être traçables à la règle et au compas – de façon qu'en recombinaison les morceaux on obtienne un carré de même aire ? Recombiner signifie déplacer les morceaux sans les déformer, en leur appliquant uniquement des translations, des rotations ou des symétries.

Ce problème, posé par le grand logicien polonais Alfred Tarski en 1952, sera résolu plus vite que son ancêtre classique. Sa solution complète est à la fois étonnante et décevante. Elle comporte deux volets.

AVEC DES CISEAUX OU AVEC DES ENSEMBLES ?

Si l'on impose aux morceaux du découpage d'être des formes géométriques limitées par des arcs de courbes régulières (cas du découpage aux ciseaux), alors L. Dubins, M. Hirsch et J. Karush ont établi en 1963 que la réponse est négative : la quadrature du cercle par découpage aux ciseaux est impossible. Il découle de leur théorème que vous ne pourrez donc pas décomposer aux ciseaux un cercle en une autre figure convexe, de type carré, triangle, œuf, ovale ou polygone régulier.

En revanche – et c'est le second volet de la réponse au problème de quadrature par découpage de Tarski –, si l'on accepte que les morceaux puissent être des sous-ensembles quelconques du disque original, alors la réponse est positive. Cela découle d'un résultat de M. Laczkovich, qui propose d'ailleurs une recombinaison du carré en n'effectuant que des translations à partir des pièces du disque découpé : la quadrature du cercle par découpage ensembliste est possible et ne nécessite que des translations. Le résultat de M. Laczkovich énonce aussi que, si deux polygones

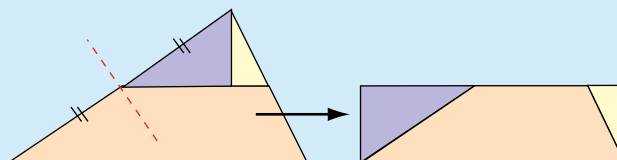
2. THÉORÈME DE WALLACE-BOLYAI-GERWEIN

Deux polygones de même aire peuvent être transformés l'un en l'autre par dissection polygonale.

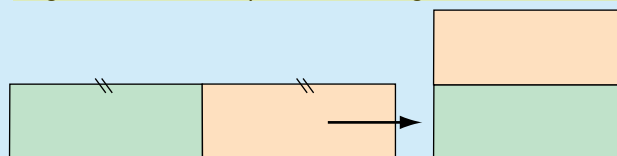
Démonstration

Pour transformer deux polygones de même aire l'un en l'autre par dissection polygonale, suivre les instructions suivantes.

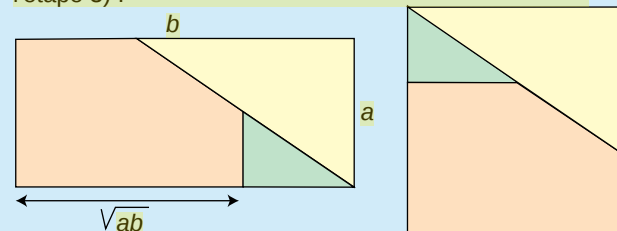
- (1) Découper le premier polygone en triangles.
- (2) Transformer chaque triangle en un rectangle (ce découpage s'applique à tout triangle, car dans tout triangle au moins l'une des hauteurs coupe le côté opposé) :



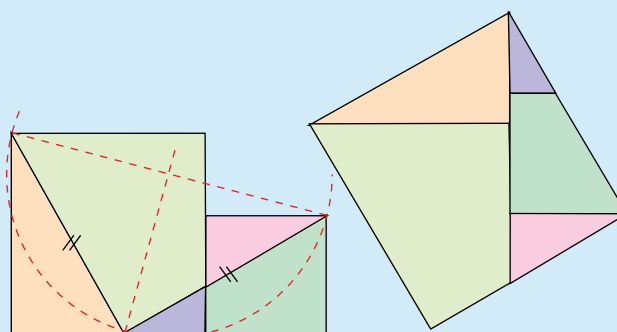
- (3) Transformer les rectangles ayant une longueur plus grande que quatre fois la largeur en rectangles ayant une longueur inférieure à quatre fois la largeur :



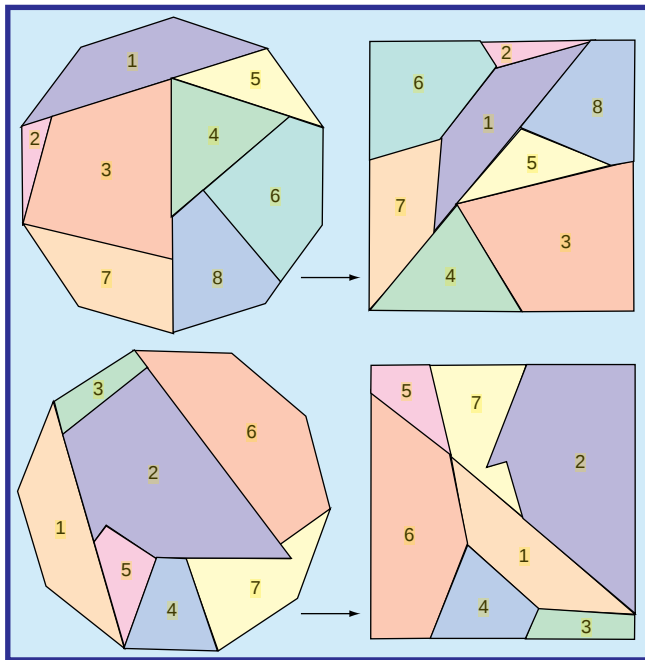
- (4) Transformer chaque rectangle en carré (cette construction ne fonctionne que si la longueur est inférieure à quatre fois la largeur, d'où la nécessité de l'étape 3) :



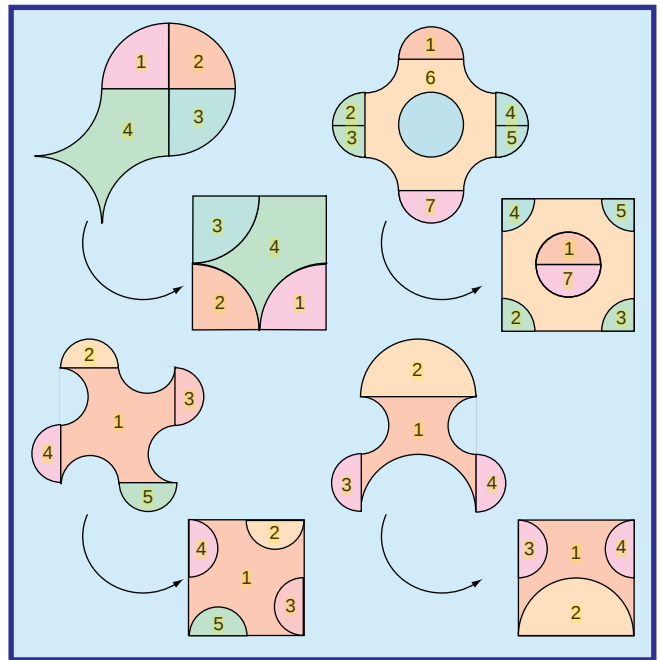
- (5) Fusionner les carrés, deux par deux, progressivement, jusqu'à avoir un unique grand carré :



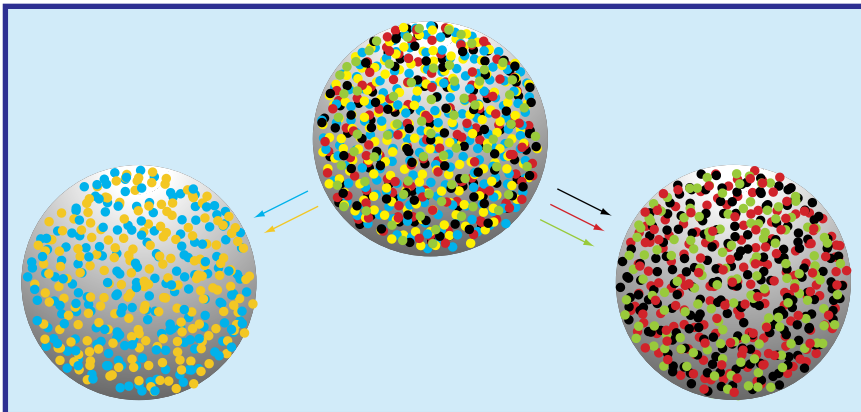
- (6) Opérer de la même façon pour le second polygone.
- (7) Superposer les découpages intervenus pour transformer le polygone 1 en carré à ceux obtenus pour transformer le polygone 2 en carré. Par construction, les pièces obtenues permettent de reconstituer le polygone 1 et le polygone 2.



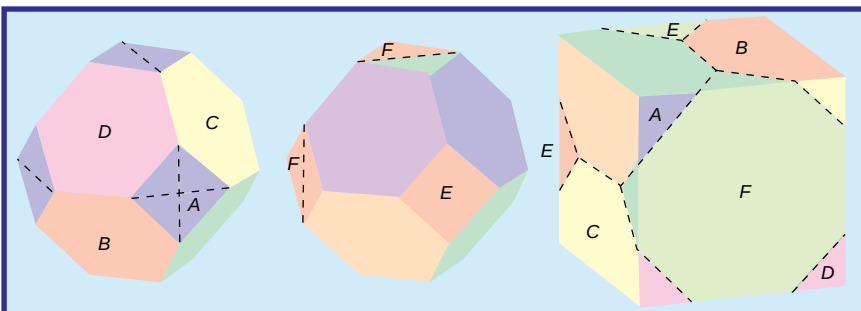
3. Record de découpage. Dans son livre de 1964, le champion mythique des découpages Harry Lindgren propose un découpage du dodéca-gone en carré n'utilisant que huit pièces. Son digne successeur, Gavin Theobald, a réussi le miracle de gagner une pièce. Il est très rare qu'on puisse établir qu'un découpage est optimal ; ici, il paraît invraisemblable qu'on puisse encore gagner une pièce, mais qui sait ?



4. Les Grecs utilisaient des découpages pour évaluer l'aire de mor-ceaux du plan, y compris ceux dont des bords sont curvilignes. Voici des formes appelées lunules dont le découpage permet de calculer l'aire en la ramenant à celle d'un carré. Hippocrate de Chio, vers 430 avant J.-C. voulait «quarrer le cercle». Pour cela, il s'intéressa à la qua-drature des lunules, qui, pensait-il, le conduirait à la solution.



5. La décomposition paradoxale de la sphère ou le paradoxe de Banach-Tarski. Une sphère pleine est composée de points jaunes, bleus, verts, rouges, noirs. Il est possible en déplaçant les points de cette sphère, stipule le théorème, de constituer une sphère pleine composée de points jaunes et bleus et une autre sphère pleine composée de points verts, rouges et noirs. Lors du déplacement, la distance mutuelle de deux points d'une même couleur ne change pas. Les mathématiciens ont démontré que le nombre de sous-ensembles est au minimum égal à 5, correspondant aux cinq couleurs représentées ici.



6. David Paterson et Anton Hanegraaf ont, indépendamment, remarqué qu'on pouvait dissé-quer un cube en six pièces pour obtenir deux octaèdres tronqués.

quelconques ont la même aire, on peut découper le premier, déplacer ses pièces en n'effectuant que des translations et recomposer le second.

GÉOMÉTRIE ENSEMBLISTE

De tels découpages théoriques n'ont aucune traduction physique, et aucune figure de cet article ne vous donnera une idée des pièces de M. Laczkovich qui réalisent la quadrature du cercle. Pourquoi ? Parce que la preuve de leur existence utilise l'axiome du choix et que les pièces des découpages sont d'une telle complexité – pire que les fractales ! – qu'on ne peut pas les représenter de façon réaliste. De surcroît, le «découpage» du disque de M. Laczkovich comporte plus de 10^{50} pièces !

On sait que l'axiome du choix fut l'objet d'âpres discussions lors de la mise au point de la théorie des ensembles et de son adoption par les mathématiciens du début du xx^e siècle. Rappelons que l'axiome du choix affirme que, si E est un ensemble non vide d'ensembles non vides alors on peut constituer un nouvel ensemble en choisissant un élément dans chaque ensemble de E . Ainsi, à partir de l'ensemble $E = \{\{a,b\},\{e,f\},\{g,h\},\{i,j\}\}$, on obtient par choix $\{a,f,h,j\}$. L'axiome du choix ne crée de difficultés que lorsque E est infini, ce qui est le cas en géométrie.

Ce n'est pas la première fois que les problèmes de découpage mettent le