

sont, en revanche, différentes. Les modèles internes nécessitent non seulement une connaissance fine des phénomènes, qui sera toujours limitée par des approximations, mais aussi la possibilité de déduire de cette connaissance les relations entre les inconnues et les observations. Lorsque l'on veut résoudre le problème direct, on doit intégrer ces lois locales. Sauf dans quelques cas très simples, donc peu réalistes, cette intégration n'est possible que par un calcul numérique. Ces calculs sont longs et complexes, et l'on ne peut donc songer à les utiliser systématiquement dans les mesures, sauf si l'on n'est pas tributaire du temps de calcul.

Les modèles externes ont des avantages et des inconvénients symétriques des modèles internes. Tout d'abord, ils n'ont pas le caractère universel des premiers : ils peuvent être satisfaisants pour un système donné, mais très mauvais pour un autre, à peine différent du premier. De plus, ils ne sont représentatifs que du domaine où l'on a observé les entrées et les sorties du système. Par exemple, un amplificateur peut être modélisé par une constante multiplicative si sa tension d'entrée est inférieure à dix volts, mais des saturations, non prises en compte dans ce modèle, peuvent apparaître au-delà. En revanche, ces modèles ont une très faible complexité calculatoire, ce qui est évidemment avantageux.

Comment alors choisir un modèle ? Un modèle interne est unique, à un degré de finesse donné, tandis qu'il peut exister plusieurs modèles externes, différant par leur structure, c'est-à-dire par la fonction mathématique qui relie les entrées aux sorties. Par exemple, par trois points, on peut choisir de faire passer soit une parabole, soit une cubique (une courbe associée à un polynôme de degré égal à 3), soit encore une fraction rationnelle (le quotient de deux polynômes). Puisque de tels choix existent, on doit tenir compte des objectifs de la mesure.

Imaginons ainsi que nous voulions prédire la population d'un État à partir d'observations passées de celle-ci : il suffit de choisir un modèle de cette évolution et d'extrapoler. Les programmes d'ajustement de courbes proposent souvent, par exemple, d'utiliser des fonctions nommées «polynômes de Lagrange», dont les coefficients sont tels que la courbe représentative passe par tous les points observés (voir la figure 3). Malheureusement, cette courbe chute

rapidement après le dernier point observé : elle ne donne évidemment pas une prévision correcte de la démographie (sauf guerre ou épidémie improbables). En revanche, les polynômes de Lagrange sont utiles pour les estimations, par interpolation, de la population entre deux années d'observation.

Autrement dit, on doit choisir les modèles en fonction de ce que l'on veut mesurer. Un modèle ne sert pas à représenter toute la réalité : il n'est utile que par référence à un objectif donné.

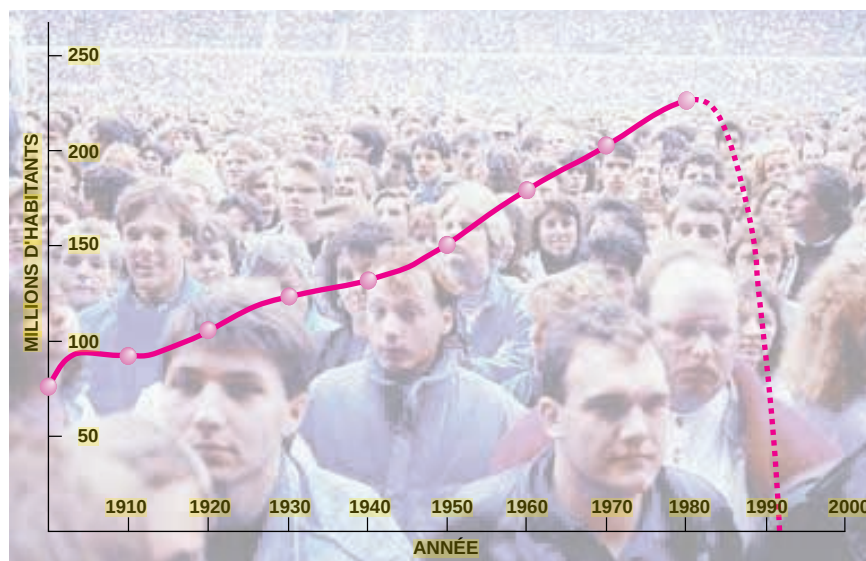
Existe-t-il des critères objectifs de choix de modèles ? Le but d'une mesure est d'obtenir un maximum d'information à partir d'observations. Dans l'exemple de la prédiction de la population, la meilleure fonction n'est pas celle qui passe par tous les points observés, mais celle qui assure la prédiction voulue avec la meilleure précision. De façon générale, le choix du modèle influe sur l'incertitude finale sur les valeurs des inconnues : il est donc logique de choisir le modèle tel que cette incertitude finale soit la plus faible possible. Dans la pratique, on fonde ce choix sur le calcul de la relation entre l'incertitude sur les observations et l'incertitude finale sur les inconnues.

Quantifier l'incertain

On ne parvient toutefois jamais à annuler complètement cette incertitude. S'il est une chose que sait l'homme, ou qu'il devrait savoir, c'est qu'il ne sait pas

tout : sa connaissance de la réalité est imparfaite. La relation directe, aussi simple soit-elle, n'est jamais connue avec une certitude absolue. Dans le cas, pourtant simple, du compteur de vitesse, on ne tient ainsi pas compte du jeu des pièces, ni des vibrations mécaniques, ni du mouvement brownien dans l'air. En pratique, on ne distingue pas l'incertitude des observations des incertitudes liées au choix du modèle : on traite toutes les incertitudes comme s'il s'agissait d'incertitudes sur les observations.

Or, quand on mesure une grandeur, on a autant besoin de connaître sa valeur que la précision avec laquelle elle est obtenue. Nous devons donc, lors de l'inversion, prendre en compte les incertitudes dans nos calculs. Nous utilisons à cette fin une approche probabiliste : à toute grandeur incertaine, nous associons une fonction, nommée fonction de densité de probabilité, dont l'amplitude est proportionnelle à la probabilité de trouver une valeur de la grandeur au voisinage d'un point. Nous pouvons alors appliquer à ces variables incertaines tous les outils mathématiques des probabilités et des statistiques, et nous prenons effectivement en compte l'incertitude dans leur traitement. Cette approche permet aussi de donner une définition quantitative de l'information, par une formule qui exprime la quantité d'information en fonction de la densité de probabilité.



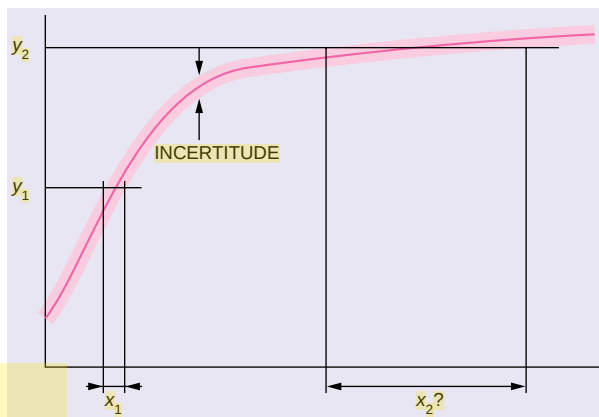
3. LES VARIATIONS DE LA POPULATION des États-Unis sont bien modélisées par une fonction analytique qui passe par tous les points connus (en rose, cet exemple est une mise en garde donnée par le logiciel MATLAB). Ce modèle ne permet manifestement pas de faire des prévisions : il prévoit une diminution très improbable. En revanche, le même modèle est utile pour des interpolations entre des mesures.

Notons que l'utilisation de lois de probabilité ne signifie pas que les variables manipulées soient aléatoires. Nous nous plaçons ici dans le cadre purement utilitaire de la définition de l'information : nous ne nous préoccupons pas du sens de la fonction de densité de probabilité, mais seulement de son utilité pour le traitement de l'incertitude.

Grâce aux lois de probabilité, on peut aussi définir la justesse de la mesure : si l'on fait une mesure, on veut non seulement qu'elle soit le moins incertaine possible, mais aussi qu'elle soit juste ! Ainsi, au tir à la cible, des impacts groupés sur le bord de la cible témoignent d'un tir peu incertain, mais faux (c'est généralement le centre qui est visé !) : la justesse est la différence entre la valeur vraie de la grandeur cherchée (qui doit être obtenue par l'étalonnage du système de mesure, c'est-à-dire le relevé des observations en fonction de valeurs fixées pour les grandeurs qui seront inconnues quand on effectuera les mesures) et la moyenne de la loi de probabilité de la mesure.

Dans les cas où une faible incertitude sur les observations conduit à une très grande incertitude sur les inconnues, par exemple quand la relation entre une observation et une inconnue est une fonction à très faible pente (voir la figure 4), on ne peut pas simplement inverser le problème direct. Ces cas, qualifiés de « problèmes mal posés », sont fréquents. Ainsi, dans l'exemple du dépôt de zinc, un choix sans précaution des fréquences de travail conduit à une infinité de valeurs possibles de l'épaisseur.

Si le problème direct est non linéaire, on ne sait généralement pas calculer la transformation des lois de probabilité des incertitudes entre les inconnues et les observations. De plus, le caractère non linéaire transforme des lois dites « centrées » (dont la moyenne est nulle) en des lois non centrées. En effet, tandis qu'un système linéaire soumis à une entrée de valeur moyenne nulle présente en sortie une valeur moyenne nulle (la somme des combinaisons linéaires des incertitudes reste nulle), un système dont la sortie est proportionnelle au carré de l'entrée, par exemple, présente en sortie, dans les mêmes conditions, une valeur moyenne



4. DANS UN PROBLÈME MAL POSÉ, l'incertitude sur les inconnues x est beaucoup plus grande que l'incertitude sur les observations y (cette incertitude est représentée par l'épaisseur de la courbe, en rose clair). On ne peut pas alors inverser le problème, c'est-à-dire déterminer la valeur de x_2 correspondant à l'observation y_2 (en revanche, x_1 est assez bien défini à partir de y_1).

non nulle : ce sont les carrés des incertitudes, tous positifs, qui sont alors combinés, et la moyenne de valeurs positives ne peut être nulle. Ainsi s'introduit une erreur de justesse (un biais), *a priori* non connue, puisque l'on ne dispose pas d'un étalonnage (on ne peut pas tracer la fonction montrant les observations en fonction des inconnues ; dans l'exemple du puits de pétrole, on ne peut pas fabriquer de gisement dont le contenu et la forme soient connus !).

Connaître ce que l'on cherche

Pour résoudre ces problèmes mal posés, comment choisir la « bonne solution » (ou du moins la « meilleure ») parmi l'infinité des solutions possibles ? Si quelqu'un nous demandait la température de notre corps à plus ou moins deux degrés près, nous répondrions sans trop d'hésitation : 37 °C. Supposons que, prenant notre température, nous devions choisir parmi trois valeurs données par un (bien étrange) thermomètre : 55 °C, 11 °C et 37,7 °C. Quelle valeur nous paraîtrait la meilleure ? La réponse, évidente, nous montre que nous avons un critère de choix : avant de faire la mesure, nous avons une idée sur la valeur cherchée. Il existe donc une information sur les inconnues avant que la mesure ne soit effectuée : c'est l'information *a priori*.

Comment utiliser cette information *a priori* ? Tout d'abord, on doit la représenter mathématiquement. Toujours dans l'exemple de la température corporelle, quel serait notre « degré de surprise » en fonction de la valeur donnée

par le thermomètre ? Nous serions très surpris de trouver 60 °C ou 25 °C, moins étonné de trouver 37 °C ou 38 °C. Pour utiliser cette information, le même formalisme que pour l'incertitude est utile : nous définissons une fonction « inverse de la surprise », et nous considérons qu'elle représente la densité de probabilité de la valeur cherchée (ici la température) traitée comme une variable aléatoire. Cette modélisation de l'incertitude est dite « bayésienne », du nom du mathématicien anglais Thomas Bayes (1702-1761) ; en pratique, c'est l'un des procédés les plus efficaces pour traiter les problèmes de mesures générali-

sées que nous exposons ici.

On améliore encore les résultats en prenant également en compte l'information *a priori* sur la structure propre des solutions recherchées, et non plus seulement sur leurs valeurs. Si l'on sait par exemple qu'un signal radio est émis en modulation de fréquence, le récepteur le recherche sous la forme du cosinus d'une fonction du temps : on ne cherche des solutions que dans l'ensemble restreint de celles qui ont des propriétés particulières.

Cette technique est utilisée par les systèmes dits « numériques » (électroniques ou informatiques), qui ne peuvent suivre continûment les variations des signaux et que l'on rencontre presque partout, particulièrement dans le domaine des télécommunications : un signal est représenté par la suite de ses valeurs obtenues à des instants équirépartis dans le temps. Le problème de la reconstitution des signaux à partir des échantillons observés est bien plus que mal posé : le nombre de solutions est infini ! Le « théorème d'échantillonnage », qui est la base du traitement numérique du signal, impose la structure de la solution : on choisit la courbe qui fluctue le moins entre les points mesurés (en d'autres termes, l'information *a priori* est alors l'hypothèse que le signal émis a été échantillonné suffisamment rapidement par le dispositif émetteur).

Une démarche de mesure

À ce stade, nous pouvons exprimer une démarche générale permettant d'effectuer une mesure, ou encore, comme