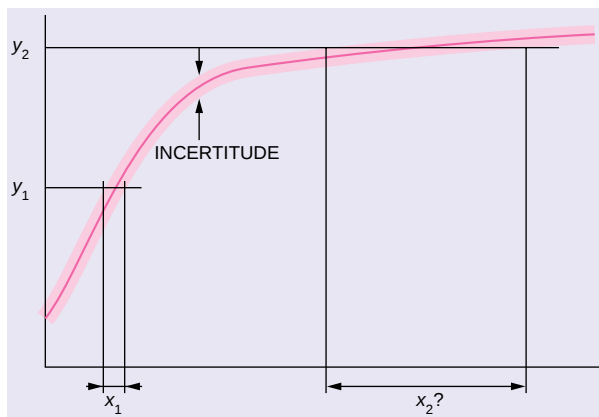


Notons que l'utilisation de lois de probabilité ne signifie pas que les variables manipulées soient aléatoires. Nous nous plaçons ici dans le cadre purement utilitaire de la définition de l'information : nous ne nous préoccupons pas du sens de la fonction de densité de probabilité, mais seulement de son utilité pour le traitement de l'incertitude.

Grâce aux lois de probabilité, on peut aussi définir la justesse de la mesure : si l'on fait une mesure, on veut non seulement qu'elle soit le moins incertaine possible, mais aussi qu'elle soit juste ! Ainsi, au tir à la cible, des impacts groupés sur le bord de la cible témoignent d'un tir peu incertain, mais faux (c'est généralement le centre qui est visé !) : la justesse est la différence entre la valeur vraie de la grandeur cherchée (qui doit être obtenue par l'étalonnage du système de mesure, c'est-à-dire le relevé des observations en fonction de valeurs fixées pour les grandeurs qui seront inconnues quand on effectuera les mesures) et la moyenne de la loi de probabilité de la mesure.

Dans les cas où une faible incertitude sur les observations conduit à une très grande incertitude sur les inconnues, par exemple quand la relation entre une observation et une inconnue est une fonction à très faible pente (voir la figure 4), on ne peut pas simplement inverser le problème direct. Ces cas, qualifiés de « problèmes mal posés », sont fréquents. Ainsi, dans l'exemple du dépôt de zinc, un choix sans précaution des fréquences de travail conduit à une infinité de valeurs possibles de l'épaisseur.

Si le problème direct est non linéaire, on ne sait généralement pas calculer la transformation des lois de probabilité des incertitudes entre les inconnues et les observations. De plus, le caractère non linéaire transforme des lois dites « centrées » (dont la moyenne est nulle) en des lois non centrées. En effet, tandis qu'un système linéaire soumis à une entrée de valeur moyenne nulle présente en sortie une valeur moyenne nulle (la somme des combinaisons linéaires des incertitudes reste nulle), un système dont la sortie est proportionnelle au carré de l'entrée, par exemple, présente en sortie, dans les mêmes conditions, une valeur moyenne



4. DANS UN PROBLÈME MAL POSÉ, l'incertitude sur les inconnues x est beaucoup plus grande que l'incertitude sur les observations y (cette incertitude est représentée par l'épaisseur de la courbe, en rose clair). On ne peut pas alors inverser le problème, c'est-à-dire déterminer la valeur de x_2 correspondant à l'observation y_2 (en revanche, x_1 est assez bien défini à partir de y_1).

non nulle : ce sont les carrés des incertitudes, tous positifs, qui sont alors combinés, et la moyenne de valeurs positives ne peut être nulle. Ainsi s'introduit une erreur de justesse (un biais), *a priori* non connue, puisque l'on ne dispose pas d'un étalonnage (on ne peut pas tracer la fonction montrant les observations en fonction des inconnues ; dans l'exemple du puits de pétrole, on ne peut pas fabriquer de gisement dont le contenu et la forme soient connus!).

Connaître ce que l'on cherche

Pour résoudre ces problèmes mal posés, comment choisir la « bonne solution » (ou du moins la « meilleure ») parmi l'infinité des solutions possibles ? Si quelqu'un nous demandait la température de notre corps à plus ou moins deux degrés près, nous répondrions sans trop d'hésitation : 37 °C. Supposons que, prenant notre température, nous devions choisir parmi trois valeurs données par un (bien étrange) thermomètre : 55 °C, 11 °C et 37,7 °C. Quelle valeur nous paraîtrait la meilleure ? La réponse, évidente, nous montre que nous avons un critère de choix : avant de faire la mesure, nous avons une idée sur la valeur cherchée. Il existe donc une information sur les inconnues avant que la mesure ne soit effectuée : c'est l'information *a priori*.

Comment utiliser cette information *a priori* ? Tout d'abord, on doit la représenter mathématiquement. Toujours dans l'exemple de la température corporelle, quel serait notre « degré de surprise » en fonction de la valeur donnée

par le thermomètre ? Nous serions très surpris de trouver 60 °C ou 25 °C, moins étonné de trouver 37 °C ou 38 °C. Pour utiliser cette information, le même formalisme que pour l'incertitude est utile : nous définissons une fonction « inverse de la surprise », et nous considérons qu'elle représente la densité de probabilité de la valeur cherchée (ici la température) traitée comme une variable aléatoire. Cette modélisation de l'incertitude est dite « bayésienne », du nom du mathématicien anglais Thomas Bayes (1702-1761) ; en pratique, c'est l'un des procédés les plus efficaces pour traiter les problèmes de mesures générali-

sées que nous exposons ici.

On améliore encore les résultats en prenant également en compte l'information *a priori* sur la structure propre des solutions recherchées, et non plus seulement sur leurs valeurs. Si l'on sait par exemple qu'un signal radio est émis en modulation de fréquence, le récepteur le recherche sous la forme du cosinus d'une fonction du temps : on ne cherche des solutions que dans l'ensemble restreint de celles qui ont des propriétés particulières.

Cette technique est utilisée par les systèmes dits « numériques » (électroniques ou informatiques), qui ne peuvent suivre continûment les variations des signaux et que l'on rencontre presque partout, particulièrement dans le domaine des télécommunications : un signal est représenté par la suite de ses valeurs obtenues à des instants équirépartis dans le temps. Le problème de la reconstitution des signaux à partir des échantillons observés est bien plus que mal posé : le nombre de solutions est infini ! Le « théorème d'échantillonnage », qui est la base du traitement numérique du signal, impose la structure de la solution : on choisit la courbe qui fluctue le moins entre les points mesurés (en d'autres termes, l'information *a priori* est alors l'hypothèse que le signal émis a été échantillonné suffisamment rapidement par le dispositif émetteur).

Une démarche de mesure

À ce stade, nous pouvons exprimer une démarche générale permettant d'effectuer une mesure, ou encore, comme

nous l'avons dit, d'obtenir de «bonnes solutions». Dans l'exemple du compteur de vitesse, la méthode suivie par le graveur de cadran a été la suivante : il a commencé par tracer la courbe donnant la position de l'aiguille pour certaines valeurs de la vitesse et a ainsi obtenu un modèle direct. Puis il s'est posé la question : «Pour chaque position de l'aiguille, quelle est la valeur de la vitesse qui, appliquée au modèle, créerait un déplacement identique du mouvement réel?» Il a ensuite porté ces indications de vitesse pour chacune des positions.

Ainsi, lorsqu'on applique les «bonnes valeurs» des inconnues à l'entrée du modèle direct, le calcul doit fournir des observations «synthétiques» les plus proches possibles des observations réelles : c'est le critère de conformité aux observations. Pour les cas simples, tel le compteur de vitesse, observations réelles et observations synthétiques peuvent être égales.

Dans les systèmes très incertains ou quand le nombre des observations est différent de celui des grandeurs recherchées, la conformité absolue aux observations est impossible. Dans le cas des problèmes mal posés, la conformité aux observations ne permet pas d'obtenir une solution unique (du moins, avec une précision suffisante). On ajoute alors un second critère : les observations synthétiques doivent être aussi proches que possible de ce que l'on en savait avant de faire la mesure. C'est un critère de conformité à l'information *a priori*.

Dans le cas général, on définit un critère composite, formé d'un critère de conformité aux observations (distance entre les observations et les sorties du modèle, ou observations synthétiques) et d'un critère de conformité à l'information *a priori*. Les «bonnes valeurs» des inconnues sont celles qui minimisent ce critère composite. Dans la pratique, on utilise un algorithme numérique qui effectue des itérations en proposant des solutions successives jusqu'à ce que le critère composite soit minimisé.

La mesure de l'information gagnée

Lorsqu'un ingénieur adopte la démarche que nous venons d'exposer afin de résoudre un problème de mesure particulier, il est conduit à effectuer des choix à plusieurs niveaux de la chaîne de mesure. Ainsi, nous avons vu que la

qualité des mesures dépend du modèle choisi. Plus généralement, on peut énoncer un critère informationnel de la qualité d'une méthode de mesure, qui guidera l'ensemble des choix.

Supposons que l'on fasse la mesure d'une tension comprise entre 0 et 256 volts avec un convertisseur analogique-numérique parfait à 256 niveaux de quantification : un tel appareil transforme une tension analogique, c'est-à-dire variant continûment, en une tension choisie parmi 256 valeurs numériques (ici, chaque niveau de quantification a donc une largeur de un volt). Avant de faire la mesure, on sait que la tension sera toujours comprise entre 0 et 256 volts : c'est l'information *a priori*. Après la mesure, si l'appareil affiche par exemple 123 volts, on sait que la tension était comprise entre 122,5 volts et 123,5 volts : c'est l'information *a posteriori*. La mesure a divisé l'incertitude par 256, et l'on peut alors calculer l'«incrément d'information», qui traduit la différence entre l'information *a posteriori* et l'information *a priori*, exprimées par des fonctions de densité de probabilité. Cet incrément est mesuré en bits : il est ici égal à 8 bits ($2^8 = 256$).

La notion d'incrément d'information caractérise ainsi de façon quantitative la qualité d'une mesure, ou d'un système de mesure (ensemble de l'appareillage et des algorithmes utilisés). Plus cet incrément est grand, meilleure est la mesure.

L'incrément d'information dépend évidemment de l'instrument de mesure. Celui-ci est en partie caractérisé par un certain nombre de paramètres : le nombre et les valeurs des fréquences dans le cas du zinc, le nombre et la position des capteurs de rayonnement dans le cas de la tomographie en rayons X, ou encore le nombre de personnes interrogées dans un sondage. On peut alors optimiser ces paramètres, appelés instrumentaux, soit en maximisant l'incrément d'information pour un nombre d'observations donné, soit en minimisant le nombre d'observations pour une incertitude résiduelle donnée, ce dernier cas se traduisant évidemment par une diminution de la complexité, donc du coût, du système de mesure.

Toutefois, à l'exception, heureusement courante, de quelques cas simples (systèmes linéaires et incertitudes réparties selon une fonction de Gauss, suivant une courbe «en

cloche»), l'incrément d'information ne peut être déterminé que par des méthodes approximatives et lourdes, tandis que les biais induits par certaines non linéarités ne peuvent être pris en compte par des méthodes analytiques. Toutes ces raisons créent des difficultés pratiques qui font que la notion d'incrément d'information, la seule conforme à une définition «informationnelle» de la mesure, reste rarement utilisée (sauf dans le cas des sondages et, plus généralement, des statistiques, où sa mise en œuvre est évidente). Notre équipe a mis au point des méthodes d'évaluation statistiques pour remédier à cette difficulté. Dans les cas très complexes, plusieurs autres méthodes existent, telles celles qui cherchent à minimiser le caractère mal posé du problème.

C'est ce que nous avons fait pour la mesure de l'épaisseur du zinc, en optimisant le choix des fréquences de travail (c'est l'optimisation de l'instrument). Cette optimisation a permis de choisir quelques fréquences pour lesquelles les mesures de l'impédance de la bobine autorisent la détermination (par la minimisation d'un critère de conformité aux observations et à l'information *a priori*) d'un triplet d'inconnues unique (à des incertitudes raisonnables près, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que celles présentes sur les mesures d'impédance).

Jacques OKSMAN dirige le Service des mesures à l'École supérieure d'électricité, à Gif-sur-Yvette.

A. TARANTOLA, *Inverse Problem Theory- Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*, Elsevier, 1987.

E. WALTER et L. PRONZATO, *Outils et méthodes pour la reconstruction de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson, 1994.

L. LE BRUSQUET et J. OKSMAN, *Débit-métrie par traceurs : reconstruction du profil de concentration*, 1^{er} Colloque interdisciplinaire en instrumentation, pp. 531-538, 18-19 novembre 1998.

L. SANDU, J. OKSMAN et G. FLEURY, *Information Criteria for the Choice of Parametric Functions for Measurement*, in *IEEE Transactions on Measurement*, à paraître.

M. DAVOUST, G. FLEURY et J. OKSMAN, *A Parametric Estimation Approach for Grooves Dimensioning using Remote Field Eddy Current Inspection*, in *Research in Nondestructing Evaluation*, à paraître.
