

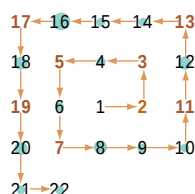
La factorisation des *repunits* est un sport plus difficile que la simple détermination de la primalité : aussi étonnant que cela paraisse, on sait prouver qu'un nombre n'est pas premier avec certitude sans pour autant donner la moindre idée de ses facteurs (voir la figure 1, où une méthode de ce type est décrite pour les *repunits* en base 2). Le nombre composé de 77 fois 1 n'est pas premier (c'est assez facile à démontrer), mais ses deux facteurs sont difficiles à identifier : l'un est un nombre premier de 30 chiffres, l'autre un nombre premier de 41 chiffres. On sait aujourd'hui factoriser tous les *repunits* jusqu'à 157 chiffres.

Les *repunits* ont la particularité évidente d'être identiques à eux-mêmes quand on inverse l'ordre de leurs chiffres. Dit autrement, ce sont des palindromes numériques. Bien sûr, il y a d'autres nombres palindromes, par exemple 12321 ou 843348.

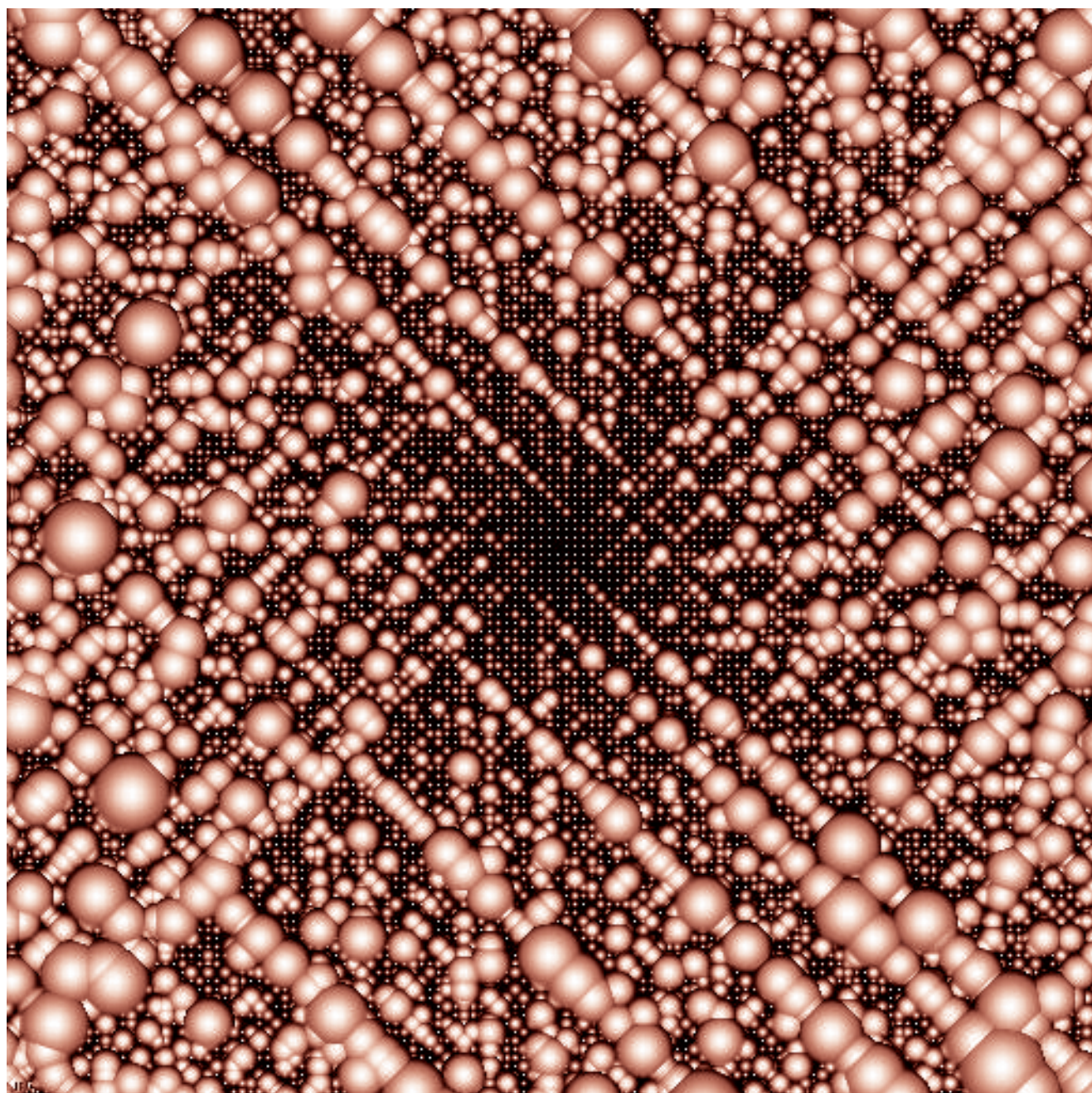
D'où la question naturelle et pressante pour tout amoureux des nombres : quels sont les nombres premiers palindromes ?

LES NOMBRES PREMIERS PALINDROMES

Il est évident que 11 est le seul nombre premier palindrome à deux chiffres (un tel nombre est de la forme XX , et donc multiple de 11). Exception faite de 11, il n'existe aucun nombre premier palindrome ayant un nombre pair de chiffres à cause du critère de divisibilité par 11 : tout nombre dont la différence de la somme de ses chiffres de rang impair et de ses chiffres de rang pair est nulle, est divisible par 11. En revanche, il existe 15 nombres premiers palindromes possédant 3 chiffres : 101, 131, 151, 181,



2. Spirale de Ulam retraitée : les nombres entiers sont inscrits à la suite les uns des autres selon une spirale carrée représentée à droite. Sur la figure ci-dessous, les diamètres des sphères associées à chaque nombre sont proportionnels au nombre de diviseurs de ce nombre. Un nombre premier se réduit à un point.



Jean-François Colonna

3. NOMBRES PREMIERS PERSISTANTS

a. Premiers permutables

Un nombre premier est permutable si, quel que soit l'ordre de ses chiffres, on obtient un nombre premier. 337 est un nombre premier permutable, car 337, 733, 373 sont premiers.

Les seuls nombres premiers permutables connus sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991, 11...1 (19 fois le "1"), 11...1 (23 fois le "1") 11...1 (317 fois le "1") 11...1 (1 031 fois le "1"). Il n'existe pas d'autres nombres premiers permutables ayant moins de 467 chiffres.

b. Premiers circulaires

Un nombre premier est circulaire si, lorsqu'on fait tourner ses chiffres, on obtient d'autres nombres premiers : par exemple, 187, 871 et 718 sont premiers.

Les seuls nombres premiers circulaires connus sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, 79, 113, 187, 199, 337, 1193, 3779, 11939, 19937, 193939, 199933, 11...1 (19 fois le "1"), 11...1 (23 fois le "1") 11...1 (317 fois le "1") 11...1 (1 031 fois le "1")

c. Premiers raccourcissables à droite

7 Les nombres premiers raccourcissables à droite restent premiers quand on en coupe la fin. Ainsi le nombre 73 939 133 est-il le plus long des nombres premiers connus raccourcissables à droite, ce qui, par définition, signifie qu'on a la pile de **73939133** nombres premiers qui est représentée à gauche.

d. Premiers raccourcissables à gauche

357686312646216567629137 Les nombres premiers qui sont raccourcissables à gauche sont ceux n'utilisant pas le 0 et qui restent premiers quand on en coupe le début. Ainsi, **46216567629137** 4632647 est un nombre raccourcissable à gauche, car c'est un nombre premier, de même que 632647, 32647, 6567629137 2647, 647, 47 et 7.

Les trois nombres premiers raccourcissables à gauche les plus longs connus sont dus à Chris Caldwell ; ce sont : **29137** 95918918997653319693967, **9137** 96686312646216567629137 et **137** 357686312646216567629137.

Ce dernier nombre donne la pile de nombres premiers représentée à gauche.

191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929. Vous remarquerez qu'aucun n'appartient aux centaines 2, 4, 5, 6 et 8 (en réfléchissant deux secondes, vous comprendrez pourquoi).

Il existe 93 nombres premiers palindromes à 5 chiffres, et 668 à 7 chiffres. Parmi ces derniers, le quadruplet suivant est remarquable : 1878781 – 1879781 – 1880881 – 1881881, car il est composé de quatre nombres premiers palindromes pris dans quatre groupes consécutifs de mille (c'est l'unique cas de ce type). La totalité des nombres premiers palindromes de 11, 13 et 15 chiffres a été calculée par Martin Eibl en utilisant le langage UBASIC. Le 9 juin 1998, le décompte de ceux à 17 chiffres a été obtenu par Carlos Rivera. C. Rivera est un amateur passionné de nombres premiers ; bien que travaillant dans l'industrie des céramiques à Monterrey, au Mexique, il a mis en place le site <http://www.sci.net.mx/~crivera/home.html>, où il présente toutes sortes de propriétés et d'énigmes récréatives concernant les nombres premiers palindromes.

Certaines identités amusantes ont été notées par Rivera. Des identités entre des nombres premiers palindromes à 3 chiffres : $101 + 131 + 151 = 383$; entre des nombres premiers palindromes à 5 chiffres : $30103 + 30203 + 30403 = 90709$; entre des nombres premiers palindromes à 43 chiffres : $100000000000000210995259901200000000000001 + 00211000000001120000000000000000001 + 1000000000000002110025200112000000000000001 = 3000000000000063297777923600000000000003$

Cette égalité est la plus petite possible de sa catégorie (une somme de trois nombres premiers palindromes de 43 chiffres donnant un nombre premier palindrome de 43 chiffres).

Ce n'est cependant encore qu'une égalité simple à côté de celle-ci, pour laquelle on a utilisé la notation $(0)_n$ pour désigner une suite de n zéros consécutifs. Il s'agit cette fois d'une égalité entre nombres premiers palindromes de 191 chiffres (noter que 191 est aussi un nombre premier palindrome) :

$$1(0)_{87}132298010892231(0)_{87}1+1(0)_{87}132300858003231(0)_{87}1+1(0)_{87}132301111103231(0)_{87}1=3(0)_{87}396899979998693(0)_{87}3$$

Toujours plus fort (ou plus absurde, selon les goûts), Rivera a découvert que le nombre premier palindrome 71317 peut s'écrire de trois façons différentes comme somme de nombres premiers consécutifs :

$$71317 = 2351 + 2357 + \dots + 2579 + 2591 \quad (29 \text{ nombres premiers})$$

$$71317 = 10163 + 10169 + 10177 + 10181 + 10193 + 10211 + 10223 \quad (7 \text{ nombres premiers})$$

$$71317 = 14243 + 14249 + 14251 + 14281 + 14293 \quad (5 \text{ nombres premiers})$$

Parmi les identités farfelues, celles-ci, découvertes à propos du nombre premier palindrome 134757431, semblent miraculeuses. Ce nombre s'écrit de 3 façons différentes comme somme de puissances des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 :

$$134757431 = 1^7 + 2^3 + 3^8 + 4^5 + 5^4 + 6^2 + 7^1 + 8^9 + 9^6$$

$$134757431 = 1^7 + 2^5 + 3^8 + 4^1 + 5^2 + 6^4 + 7^3 + 8^9 + 9^6$$

$$134757431 = 1^7 + 2^8 + 3^4 + 4^2 + 5^3 + 6^5 + 7^1 + 8^9 + 9^6$$

Ce nombre est le seul possédant cette propriété. Il existe – paraît-il – un autre nombre premier palindrome qu'on peut exprimer de deux façons différentes comme somme de puissances des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un lecteur saura-t-il le trouver ?

SUPERSTITION

Laissons-nous glisser un peu plus vers la conception pythagoricienne des nombres qui, on le sait, comportait un élément de superstition. Ne croyez-vous pas que le fait suivant, remarqué en 1998 ($1998 = 3 \times 666$) par G.L. Honaker, doit posséder une interprétation philosophique ou religieuse importante ? La somme des 666 plus petits nombres premiers palindromes est le nombre 2391951273, qui vérifie l'égalité remarquable :

$$2^3 + 3^3 + 9^3 + 1^3 + 9^3 + 5^3 + 1^3 + 2^3 + 7^3 + 3^3 = 666 + 666 + 666.$$