

Ceux qui s'intéressent au nombre 666 considéré comme maléfique seront heureux d'apprendre que les nombres de la forme $10...06660...01$ (appelés nombres premiers palindromes) ont été soigneusement étudiés. Le plus petit est 16661. Le suivant est : $1\,000\,000\,000\,000\,000\,666\,000\,000\,000\,000\,001 = 1(0)_{13}666(0)_{13}1$ (le 13 ne devrait-il pas nous intriguer?).

Harvey Dubner, considérant que la connaissance de cette espèce particulière méritait quelques minutes de calcul, a lancé sa machine à la recherche des nombres premiers palindromes maléfiques. Il a établi que les 7 plus petits nombres de cette espèce diabolique sont ceux ayant un nombre de zéros entre le premier "1" et le premier "6" égal à 0, 13, 42, 506, 608, 2472, et 2623. Pourquoi ces nombres-là au-delà du 13? Laissons aux lecteurs le soin de proposer leurs interprétations.

Plus sérieusement – si j'ose dire –, le nombre premier palindrome le plus long connu est dû au même Harvey Dubner. C'est : $1(0)_{8176}3644463(0)_{8176}1$, qui possède 16361 (qui est palindrome) chiffres.

Cependant, comme de nouveaux records sont régulièrement obtenus, il se peut qu'au moment où paraîtra ce texte le champion ait changé. Sur le site Internet de Patrick de Geest, vous trouverez les mises à jour de ces records et bien d'autres informations divertissantes concernant les nombres premiers palindromes : <http://www.wing.be/~ping6758/palpri.shtm>

1379 EST TRÈS PRIMÉVAL

Mike Keith a étudié récemment la notion de nombre priméval. Vous avez sans doute remarqué que certains mots en contiennent d'autres : le mot rameau contient les mots rame, rama, eau, mare, mure, mura, mue, rue, mer, mur, mu, me, ma, au, a. Mike Keith propose de transposer cette richesse aux nombres premiers, qui, contrairement aux mots, sont universels et ne changent pas d'un pays à l'autre. Il s'est donc attaché aux nombres qui contiennent des nombres premiers.

Le nombre 1379 contient, par exemple, les 31 nombres premiers : 3, 7, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 137, 139, 173, 179, 193, 197, 317, 379, 397, 719, 739, 937, 971, 1973, 3719, 3917, 7193, 9137, 9173, 9371.

Passionné par cette propriété, Mike Keith définit le caractère priméval d'un nombre. Le nombre 1379 est très priméval, le nombre 4684 ne l'est pas du tout (il ne contient aucun nombre premier).

Un nombre n contenant k nombres premiers est un record priméval si aucun nombre plus petit que n n'est autant priméval que n (ne contient k nombres premiers). En utilisant son ordinateur, Keith a compté pour tous les nombres, jusqu'à 100 000, combien chacun contenait de nombres premiers. Le nombre 2 est un record priméval. En revanche, 3 ne l'est pas, car il ne contient qu'un seul nombre premier, or 2, plus petit que 3, contient lui aussi un nombre premier. De même, aucun des nombres 5 et 7 n'est un record priméval. Le nombre 11 n'est pas un record priméval car lui aussi ne contient qu'un seul nombre premier : lui-même. Le nombre 13 est un record priméval, car il contient les nombres premiers : 3, 13, 31.

Viennent ensuite 37 qui contient 4 nombres premiers, 107 (5), 113 (7), 137 (11), 1013 (14), 1037 (19), 1079 (21), 1237 (26), 1367 (29), 1379 (31), 10079 (33), 10123 (35), 10136 (41), 10139 (53), 10237 (55), 10279 (60), 10367 (64), 10379 (89), 12379 (96), 13679 (106).

Pour chaque entier k , on peut se demander quel est le plus petit n contenant exactement k nombres premiers. Voici les 30 premières valeurs trouvées : 2 (plus petit nombre contenant 1 nombre premier) ; 25 (plus petit nombre contenant 2 nombres premiers) ; 13 (3) ; 37 (4) ; 107 (5) ; 127 (6) ; 113 (7) ; 167 (8) ; 1027 (9) ; 179 (10) ; 137 (11) ; 1036 (12) ; 1127 (13) ; 1013 (14) ; 1237 (15) ; 1135 (16) ; 1136 (17) ; 1123 (18) ; 1037 (19) ; 1139 (20) ;

4. CARRÉS MAGIQUES DE NOMBRES PREMIERS

(a) Pour 100 \$ de plus

En 1987, Martin Gardner offrit 100 \$ à quiconque découvrirait le premier un carré magique d'ordre 3 constitué de nombres premiers consécutifs. Le pari fut gagné l'année suivante par Harry Nelson qui, utilisant un ordinateur Cray, découvrit 22 solutions dont la plus petite est :

1480028201	1480028129	1480028183
1480028153	1480028171	1480028189
1480028159	1480028213	1480028141

(b) Méthode générale

D'autres carrés magiques de ce type ont été découverts récemment, qui satisfont à une condition supplémentaire : les nombres premiers utilisés sont en progression arithmétique.

Partant du carré magique classique composé des nombres entre 0 et 8, on construit un carré magique de taille 3×3 avec 9 nombres en progression arithmétique $P, P + R, P + 2R, \dots, P + 8R$

1	8	3		P+R	P+8R	P+3R
6	4	2	→	P+6R	P+4R	P+2R
5	0	7		P+5R	P	P+7R

La difficulté est de trouver des nombres premiers consécutifs en progression arithmétique (problème différent et plus difficile que celui consistant à trouver des nombres premiers en progression arithmétique). Ce problème a été l'objet récemment de progrès inattendus et depuis février 1998, à la suite d'un calcul de Manfred Toplic et Tony Forbes, on connaît une suite de 10 nombres premiers consécutifs en progression arithmétique. On peut donc construire des carrés magiques 3×3 composés de nombres premiers consécutifs. La raison de la suite trouvée est 210, et le nombre P est :

10099697246971424763778665558796984032950932
46891900418036034177589043417033488821590672
29719.

(c) encore le nombre diabolique 666

Pour les superstitieux, nous avons représenté ci-dessous un carré magique de nombres premiers dont la somme de chaque ligne et chaque colonne est 666 (découvert par Alan William Johnson). Ce carré est pandiagonal, car les diagonales coupées donnent elles aussi le total de 666. Exemple : $3+101+173+197+151+41=666$.

666	3	107	5	131	109	311	3	666
	7	331	193	11	83	41		
	103	53	71	89	151	199		
	113	61	97	197	167	31		
	367	13	173	59	17	37	666	
	73	101	127	179	139	47		666

1079 (21) ; 10124 (22) ; 10126 (23) ; 1349 (24) ; 1279 (25) ; 11237 (26) ; 3479 (27) ; 10699 (28) ; 1367 (29) ; 10179 (30).

On remarquera le fait surprenant que les deux nombres consécutifs, 1135 et 1136 se trouvent dans cette liste (ainsi d'ailleurs que 1139 tout proche).

Mike Keith s'est aussi demandé quel était le plus petit nombre premier contenant tous les nombres premiers de k chiffres (qu'il appelle nombres premiers k -primévaux).
 – 2357 est le plus petit nombre premier 1-priméval : il contient tous les nombres premiers d'un chiffre.
 – 1123465789 est le plus petit nombre 2-priméval : il contient tous les nombres premiers de deux chiffres (11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97), et c'est le plus petit ayant cette propriété ;
 – 101122334455667788997 est le plus petit nombre 3-priméval ;
 – 100111222333444555666777998889 est le plus petit nombre priméval
 Qui calculera le suivant ?

NOMBRES ÉCONOMES ET PRODIGES

Entre l'amusement et les mathématiques sérieuses, le pas est vite franchi, comme le montre l'exemple des nombres économes, récemment introduit. Ces nombres se trouvent liés à la notion de complexité de Kolmogorov et à des conjectures puissantes de théorie des nombres formulées depuis longtemps.

Bernardo Recamán Santos a proposé d'appeler équidigital un nombre dont la factorisation en nombres premiers demande le même nombre de chiffres que son écriture décimale. Exemples : $162 = 7.3^4$; $15 = 3.5$. Il appelle de même économe un nombre dont la factorisation demande moins ou autant de chiffres que l'écriture décimale. Exemples : $1024 = 2^{10}$; $492075 = 3^9.5^2$. Il dénomme alors, bien sûr, prodiges les nombres pour lesquels l'écriture en facteurs premiers est aussi coûteuse ou plus coûteuse que l'écriture décimale usuelle. Exemples : $34 = 2.17$; $140 = 2^2.5.7$. Ces définitions rappellent celles de nombre simple au sens de Kolmogorov, qu'on définit en considérant le moyen de codage le plus économique qui représente un nombre.

Les nombres 13, $14 = 2.7$, $15 = 3.5$, $16 = 2^4$, 17 constituent une suite de

5 nombres entiers consécutifs économes. Les définitions dépendent de la base de numération, mais les résultats que nous présentons, ici en base 10, par souci de simplification, s'étendent aux autres bases de numération.

Constatant la présence régulière de nombres prodiges, R. Pinch s'est demandé s'il était possible qu'existent de longues séquences d'entiers successifs qui soient tous économes. On trouve une suite de 7 nombres économes consécutifs entre 157 et 163, parmi les petits entiers, mais rien de plus.

Dans un article de février 1998, R. Pinch, du *Queens' College*, à Cambridge, a réussi à lier ce problème à une célèbre conjecture mathématique concernant les nombres premiers : la conjecture de J. Dickson. Cette conjecture (énoncée en 1904) est un peu compliquée, mais sa puissance mérite qu'on la considère avec sérieux. La conjecture de Dickson (non démontrée aujourd'hui) stipule que :

Pour toute suite a_i et b_i ($i = 1, \dots, k$) d'entiers, il existe une infinité de valeurs de n telles que tous les nombres $(a_1n + b_1)$, $(a_2n + b_2)$, ..., $(a_kn + b_k)$ soient simultanément des nombres premiers, sauf s'il existe un entier d qui, pour tout n , divise le produit $(a_1n + b_1)(a_2n + b_2) \dots (a_kn + b_k)$. Pour k égal à 1, la conjecture indique que, si

les nombres $a_1n + b_1$ ne sont pas tous multiples d'un même nombre d quand n varie, alors il existe une infinité de nombres premiers de la forme $a_1n + b_1$. Cet énoncé implique immédiatement le théorème de Dirichlet (lui est démontré) : si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers de

la forme $a_1n + b_1$.

La conjecture de Dickson est un énoncé puissant qui, si on le démontrait, donnerait la solution d'une multitude de problèmes concernant les nombres premiers, en particulier la solution du problème des nombres premiers jumeaux : démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers séparés de 2 (comme 17 et 19) ; du problème des nombres de Mersenne composés : démontrer qu'il existe une infinité de nombres composés de la forme $2^n - 1$, avec n premier.

Pinch a établi, à partir de la conjecture de Dickson, qu'il existe des suites de nombres consécutifs économes aussi longues qu'on veut. De même, il existe des suites de nombres consécutifs prodiges aussi longues qu'on veut. Bien que reposant sur une conjecture non démontrée (et ne constituant donc pas une preuve complète), son travail correctement exploité l'a conduit à découvrir numériquement une suite de neuf nombres consécutifs économes allant de 1034429177995381247 à 1034429177995381255, et qui sont indiqués sur le site web de *Pour la Science*.

Il n'est pas certain que ces neuf nombres économes consécutifs soient les plus petits possibles. Un lecteur aura-t-il le courage de se lancer dans la recherche de la plus petite solution ?

J	e	a	n	L	i	l
.				l	e	.
P				e		.
a			u	m		a
l			D ELA-	i		l
HAYE	e	s	t p	rofesseur		
à				:		
l				d	e	l
,				a		h
U	v	e	r	s	i	e
i				n	t	
é				@		
d				e	l	f