

1079 (21) ; 10124 (22) ; 10126 (23) ; 1349 (24) ; 1279 (25) ; 11237 (26) ; 3479 (27) ; 10699 (28) ; 1367 (29) ; 10179 (30).

On remarquera le fait surprenant que les deux nombres consécutifs, 1135 et 1136 se trouvent dans cette liste (ainsi d'ailleurs que 1139 tout proche).

Mike Keith s'est aussi demandé quel était le plus petit nombre premier contenant tous les nombres premiers de k chiffres (qu'il appelle nombres premiers k -primévaux).

– 2357 est le plus petit nombre premier 1-priméval : il contient tous les nombres premiers d'un chiffre.

– 1123465789 est le plus petit nombre 2-priméval : il contient tous les nombres premiers de deux chiffres (11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97), et c'est le plus petit ayant cette propriété ;

– 10112233445566788997 est le plus petit nombre 3-priméval ;

– 100111222333444555666777998889 est le plus petit nombre priméval

Qui calculera le suivant ?

NOMBRES ÉCONOMES ET PRODIGES

Entre l'amusement et les mathématiques sérieuses, le pas est vite franchi, comme le montre l'exemple des nombres économes, récemment introduit. Ces nombres se trouvent liés à la notion de complexité de Kolmogorov et à des conjectures puissantes de théorie des nombres formulées depuis longtemps.

Bernardo Recamán Santos a proposé d'appeler équidigital un nombre dont la factorisation en nombres premiers demande le même nombre de chiffres que son écriture décimale. Exemples : $162 = 7.3^4$; $15 = 3.5$. Il appelle de même économe un nombre dont la factorisation demande moins ou autant de chiffres que l'écriture décimale. Exemples : $1024 = 2^{10}$; $492075 = 3^9.5^2$. Il dénomme alors, bien sûr, prodiges les nombres pour lesquels l'écriture en facteurs premiers est aussi coûteuse ou plus coûteuse que l'écriture décimale usuelle. Exemples : $34 = 2.17$; $140 = 2^2.5.7$. Ces définitions rappellent celles de nombre simple au sens de Kolmogorov, qu'on définit en considérant le moyen de codage le plus économique qui représente un nombre.

Les nombres 13, $14 = 2.7$, $15 = 3.5$, $16 = 2^4$, 17 constituent une suite de

5 nombres entiers consécutifs économes. Les définitions dépendent de la base de numération, mais les résultats que nous présentons, ici en base 10, par souci de simplification, s'étendent aux autres bases de numération.

Constatant la présence régulière de nombres prodiges, R. Pinch s'est demandé s'il était possible qu'existent de longues séquences d'entiers successifs qui soient tous économes. On trouve une suite de 7 nombres économes consécutifs entre 157 et 163, parmi les petits entiers, mais rien de plus.

Dans un article de février 1998, R. Pinch, du *Queens' College*, à Cambridge, a réussi à lier ce problème à une célèbre conjecture mathématique concernant les nombres premiers : la conjecture de J. Dickson. Cette conjecture (énoncée en 1904) est un peu compliquée, mais sa puissance mérite qu'on la considère avec sérieux. La conjecture de Dickson (non démontrée aujourd'hui) stipule que :

Pour toute suite a_i et b_i ($i = 1, \dots, k$) d'entiers, il existe une infinité de valeurs de n telles que tous les nombres $(a_1n + b_1)$, $(a_2n + b_2)$, ..., $(a_kn + b_k)$ soient simultanément des nombres premiers, sauf s'il existe un entier d qui, pour tout n , divise le produit $(a_1n + b_1)(a_2n + b_2) \dots (a_kn + b_k)$. Pour k égal à 1, la conjecture indique que, si

les nombres $a_1n + b_1$ ne sont pas tous multiples d'un même nombre d quand n varie, alors il existe une infinité de nombres premiers de la forme $a_1n + b_1$. Cet énoncé implique immédiatement le théorème de Dirichlet (lui est démontré) : si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe une infinité de nombres premiers de

la forme $a_1n + b_1$.

La conjecture de Dickson est un énoncé puissant qui, si on le démontrait, donnerait la solution d'une multitude de problèmes concernant les nombres premiers, en particulier la solution du problème des nombres premiers jumeaux : démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers séparés de 2 (comme 17 et 19) ; du problème des nombres de Mersenne composés : démontrer qu'il existe une infinité de nombres composés de la forme $2^n - 1$, avec n premier.

Pinch a établi, à partir de la conjecture de Dickson, qu'il existe des suites de nombres consécutifs économes aussi longues qu'on veut. De même, il existe des suites de nombres consécutifs prodiges aussi longues qu'on veut. Bien que reposant sur une conjecture non démontrée (et ne constituant donc pas une preuve complète), son travail correctement exploité l'a conduit à découvrir numériquement une suite de neuf nombres consécutifs économes allant de 1034429177995381247 à 1034429177995381255, et qui sont indiqués sur le site web de *Pour la Science*.

Il n'est pas certain que ces neuf nombres économes consécutifs soient les plus petits possibles. Un lecteur aura-t-il le courage de se lancer dans la recherche de la plus petite solution ?

J	e	a	n	L	i	l
.					e	.
P						
a			u			a
l			D ELA-	i		l
HAYE	e	s	t p	rofesseur		
à				:		
l'				d	e	l
U				a		
i	v	e	r	s	i	e
é				n	t	
d				e	l	f