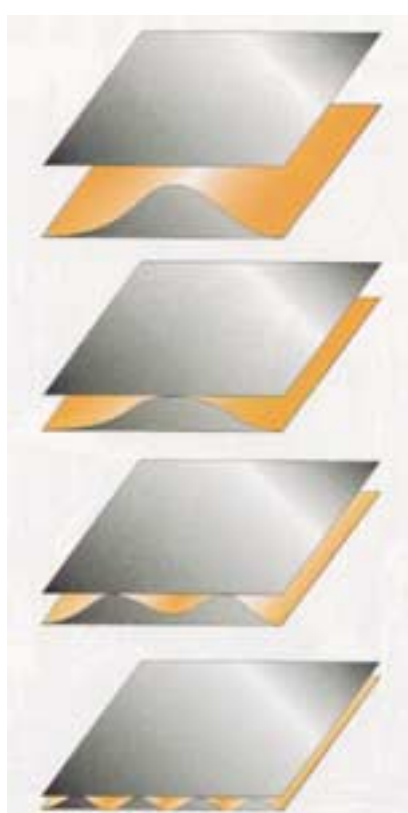




Les premières étapes de la déformation d'une feuille entre deux plaques rigides.

juste de toucher le support, la feuille est composée de deux plis jumeaux dont la hauteur est moitié de la hauteur initiale avant écrasement. Que vaut alors sa force de poussée sur la plaque ? Pour la déterminer, agrandissons un des deux plis : nous retrouvons une situation identique à la situation initiale. Comme au début de l'opération, le pli ne poussait pas sur la plaque d'écrasement, chacun des plis jumeaux ne pousse pas non plus : la réaction de la feuille sur la plaque qui l'écrase est nulle. Le même raisonnement appliqué aux plis des générations successives conduit à la même conclusion : la réaction de la feuille s'annule par intermittence au cours de l'écrasement !

Ce raisonnement s'étend aux autres états de la feuille (à l'exception de ceux où un petit pli reste en suspens). Pour cela, comparons les états présentant des plis de tailles différentes, mais de même forme. Un calcul mécanique montre qu'à forme donnée, un pli de longueur moitié pousse quatre fois plus ; comme les plis sont alors deux fois plus nombreux que les plis initiaux, une feuille écrasée de moitié pousse donc au total non pas deux fois, mais huit fois plus fort !

Lorsque la plaque se déforme, chacune de ses parties reste ainsi élastique, mais la réaction globale est non linéaire : une succession de petits ressorts ne fait pas ici un grand ressort. Les systèmes lamellaires (contreplaqués, matériaux composites), les dépôts de films sur des substrats ou les couches géologiques se comportent probablement ainsi.

Alain POCHEAU et Benoît ROMAN
Université Aix-Marseille 1, Marseille

Aucun repunit n'est une puissance pure

L'ordinateur est un atout décisif en théorie des nombres.

Jean-Paul Delahaye nous a récemment fait voyager dans l'univers enchanteur des nombres dont l'écriture décimale possède de belles propriétés de symétrie, et, en particulier, parmi les repunits, ces nombres, comme 11 et 111111, constitués d'une chaîne de 1 (voir *Les chasseurs de nombres premiers*, *Pour la Science*, avril 1999, page 100)

Outre la question de leur primalité, thème central de l'article de J.-P. Delahaye, d'autres problèmes intéressent les mathématiciens, notamment le suivant : un repunit peut-il être un carré, un cube, ou, plus généralement, une puissance parfaite ? À première vue, si de tels nombres existent, ils semblent beaucoup plus rares que les repunits premiers, car seuls environ $x^{1/2}$ entiers compris entre 0 et x sont des puissances pures, (ce sont pour la plupart des carrés, les autres puissances étant nettement moins nombreuses), alors que, selon la loi de raréfaction des nombres premiers, $x/\log x$ d'entre eux, environ, sont des nombres premiers inférieurs à x .

Depuis une vingtaine d'années, on sait qu'aucun repunit différent de 1, est un carré, ni un cube, ni même une puissance p -ième pour tout entier p inférieur ou égal à 19, mais le résultat général n'a été démontré que l'an dernier : mis à part 1, aucun entier ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base dix n'est une puissance parfaite. En outre, la même conclusion s'applique à tous les nombres de la forme $10(k)10(k)1$, où $0(k)$ désigne le bloc formé de k fois le chiffre 0.

Le problème revient à résoudre l'équation diophantienne (cet épithète signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux solutions qui sont des nombres entiers), $10^n - 1 = 9y^q$, où les inconnues n , y et q sont des entiers au moins égaux à 2. En effet, le nombre $10^n - 1$ s'écrit avec n chiffres 9, et donc $(10^n - 1)/9$ s'écrit avec n chiffres 1.

La première étape consiste à montrer que l'entier q , que l'on peut sans restriction supposer premier, n'est pas trop grand. Pour cela, décomposons un nombre de la forme $9y^q + 1$ en produit de facteurs premiers, et notons u l'exposant de 5 dans cette décomposition ; on travaille ici avec le nombre 5 mais on pourrait également choisir le nombre 2, l'essentiel est de considérer un diviseur premier de 10. Bien sûr, u peut être nul

et est inférieur à $2 + q \log y / \log 5$, puisque $5^u < 10y^q$. Un résultat théorique riche de conséquences spectaculaires dans le domaine des équations diophantiennes donne cependant une bien meilleure majoration pour u , à savoir $u < 300 \log^2 q \log y$. Si l'on suppose que notre nombre $9y^q + 1$ est égal à 10^n , on a dans ce cas $u=n$ et, comme $10^n > y^q$, on obtient $n > q \log y / \log 10$. On déduit alors de ces inégalités une très bonne majoration pour q , et l'on parvient par cette méthode à montrer précisément que q est inférieur ou égal à 2063.

On a ainsi ramené la résolution d'une équation à trois inconnues à celle d'un nombre fini et pas trop élevé (en fait, exactement 311, car il y a 311 nombres premiers compris entre 2 et 2063) d'équations en deux inconnues n et y . Les étapes suivantes consistent à prouver que, pour chacune des 311 valeurs de q qu'il reste à traiter, si $10^n - 1 = 9y^q$, alors les entiers n et y vérifient nécessairement certaines conditions qui se révèlent, en fin de compte, incompatibles ! Par exemple, on démontre, en utilisant des considérations de congruence, que q divise $n-1$. Il s'agit d'un simple test, cependant beaucoup trop long pour être effectué à la main. Il a donc fallu écrire un court programme et faire appel à l'ordinateur, qui s'est chargé des vérifications nécessaires. Cet aspect de la démonstration mérite d'être souligné, car nous sommes à une époque charnière où les progrès de nature théorique et les capacités de calcul des ordinateurs se complètent à merveille. Ainsi, dans de nombreuses questions relatives aux équations diophantiennes, la

théorie ramène le problème à un petit nombre de sous-problèmes plus simples, que l'on résout alors (en partie) grâce aux ordinateurs ... et à de très astucieux programmes !

Contrairement aux apparences, les repunits n'ont pas livré tous leurs secrets ! Nous nous sommes contentés ici d'évoquer la base dix, alors qu'une question plus générale demeure en suspens : un nombre ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base x peut-il être une puissance pure ? À ce jour, on n'en connaît que trois, le nombre 11111 en base 3, qui vaut $121 = 11^2$, le nombre 1111 en base 7, qui est égal à $400 = 20^2$ et le nombre 111 en base 18, qui vaut $343 = 7^3$. On ignore s'il existe une infinité de tels exemples, mais on sait que ce sont les seuls en base x^t , avec x inférieur à 10 000 et t un entier positif quelconque... Il reste donc beaucoup de travail !

Yann BUGEAUD,
Université de Strasbourg



Ventouses lumineuses

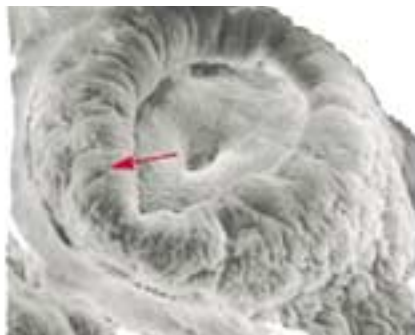
Les ventouses d'une pieuvre des grands fonds océaniques ont évolué en organes lumineux.

Dans les grands fonds de l'océan, là où la lumière du ciel ne parvient quasiment plus, certains poissons... pêchent «au lamparo» : ils sont munis d'un organe émettant de la lumière, attirant leurs proies qu'ils n'ont plus qu'à avaler. Diverses espèces marines, par exemple, les seiches et les calamars, ont également des organes lumineux. Toutefois, le groupe des pieuvres, voisin des seiches semblait dépourvu de cet artifice. Pourtant, Sönke Johnsen et Edith Widder, de l'Institut océanographique de Floride, et Elizabeth Balser, de l'Université de l'Illinois, ont découvert une espèce de pieuvre dont

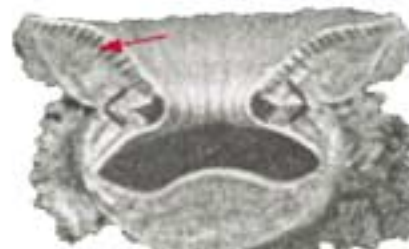
les huit tentacules sont munis d'une rangée d'organes qui émettent une lumière bleutée.

Dotées d'un système nerveux élaboré, les pieuvres sont parmi les invertébrés les

plus évolués. Elles sont capables d'apprendre en imitant un congénère. La plupart des espèces progressent sur des fonds rocheux à l'aide de deux rangées de ventouses adhésives disposées le long de leurs tentacules. Elles utilisent aussi les ventouses pour immobiliser leurs proies. Un sous groupe de pieuvres, les cirrates,



1. Microphotographie d'un organe lumineux (0,5 millimètre de diamètre) de *Stauroteuthis syrtensis* qui a conservé certaines caractéristiques anatomiques d'une ventouse : un anneau d'épiderme (flèche) entoure une dépression percée d'un pore.



2. Coupe transversale d'une ventouse typique (deux millimètres de diamètre). On retrouve le bourrelet (flèche) entourant une petite dépression. Au centre, un pore s'ouvre sur une chambre où la pression varie pour assurer l'adhérence.