

vateur attentif remarque qu'un trou sur deux reste vide : dans un triangle sur deux (bleu sur la figure 1b) est posée une sphère de la deuxième couche ; dans un triangle sur deux (vide), il n'y a pas de sphère. Dans les espaces «vides» de la seconde couche, nous déposons les sphères pour former la troisième couche, et ainsi de suite. Comme à chaque couche, nous sommes libres de choisir, soit les espaces correspondant aux triangles bleus, soit les autres, nous pouvons construire ainsi une infinité d'arrangements de sphères, dont les densités seront égales.

Bien entendu, un empilement de sphères de même taille ne remplira jamais l'espace aussi complètement qu'un empilement de cubes, car, entre les surfaces courbes des sphères, il subsiste nécessairement des vides. Le volume occupé par les sphères représente, dans le cas de l'arrangement des oranges, $\pi/\sqrt{18}$, soit 74,048 pour cent du volume total.

L'arrangement minimise-t-il les volumes vides ? La question paraît résolue et donc évidente, car nous ne pouvons imaginer un entassement plus dense. Le mathématicien et astronome Johannes Kepler, plus connu pour ses trois lois régissant le mouvement des planètes, avait déjà conjecturé, en 1609, qu'il était impossible d'obtenir mieux, c'est-à-dire qu'il était impossible d'inventer un empilement laissant moins d'espaces vides. Le problème est de formulation simple, la démonstration est étonnamment difficile.

Ainsi, l'histoire se répète : un génie, style Kepler, Fermat ou Goldbach, lance une hypothèse, et les scientifiques mettent des siècles à la prouver. Le problème

de Kepler résista aux efforts des spécialistes un peu plus longtemps que la conjecture, beaucoup plus célèbre, de Fermat. La conjecture de Kepler était néanmoins assez importante pour que, en 1901, David Hilbert la mentionne dans la série de problèmes que les mathématiciens avaient à résoudre au xx^e siècle.

Durant l'été 1998, Thomas Hales, de l'Université du Michigan à Ann Harbor, avança avec circonspection une démonstration de la conjecture de Kepler qu'il soumit à la vérification de ses collègues. Thomas Hales était prudent : la démonstration de la conjecture, comme d'ailleurs celle de Fermat, avait, par le passé, suscité nombre de déconvenues.

Toutes les prétendues démonstrations précédentes, et elles furent légion, étaient fausses. Ainsi, la démonstration de Wu-Yi Hsiang, mathématicien à l'Université de Californie, a fait couler beaucoup d'encre ; Wu-Yi Hsiang est à présent le seul à considérer que sa démonstration est exacte, contre l'avis de la communauté mathématique, laquelle le condamne «faute de preuve». Quant à la conjecture de Goldbach, elle résiste encore.

CE QUI EST PATENT... N'EST PAS ÉVIDENT

À l'opposé d'Andrew Wiles, qui a démontré la conjecture de Fermat après dix ans de travail dans le plus grand secret, Thomas Hales n'a jamais fait mystère de ses travaux. Son œuvre est à la disposition de tous sur le site Internet <http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/kephistory.html>.



2. Kepler (1571-1630) vécu, à la fin de sa vie, dans cette maison de Linz, en Autriche.

Où la difficulté réside-t-elle ? Pourquoi est-il si difficile de démontrer selon les strictes règles de l'art mathématique un fait patent qui semble relever de la géométrie élémentaire ?

Premièrement, il est difficile d'imaginer des solutions meilleures que la plus évidente... parce qu'il n'en existe pas. Il y a également une inhibition : on a spon-

FORMULATION DE LA CONJECTURE PAR KEPLER

En général, des globules égaux, rassemblés dans un récipient quelconque, s'ordonnent de deux manières, selon les deux modes de leur disposition dans un plan quelconque.

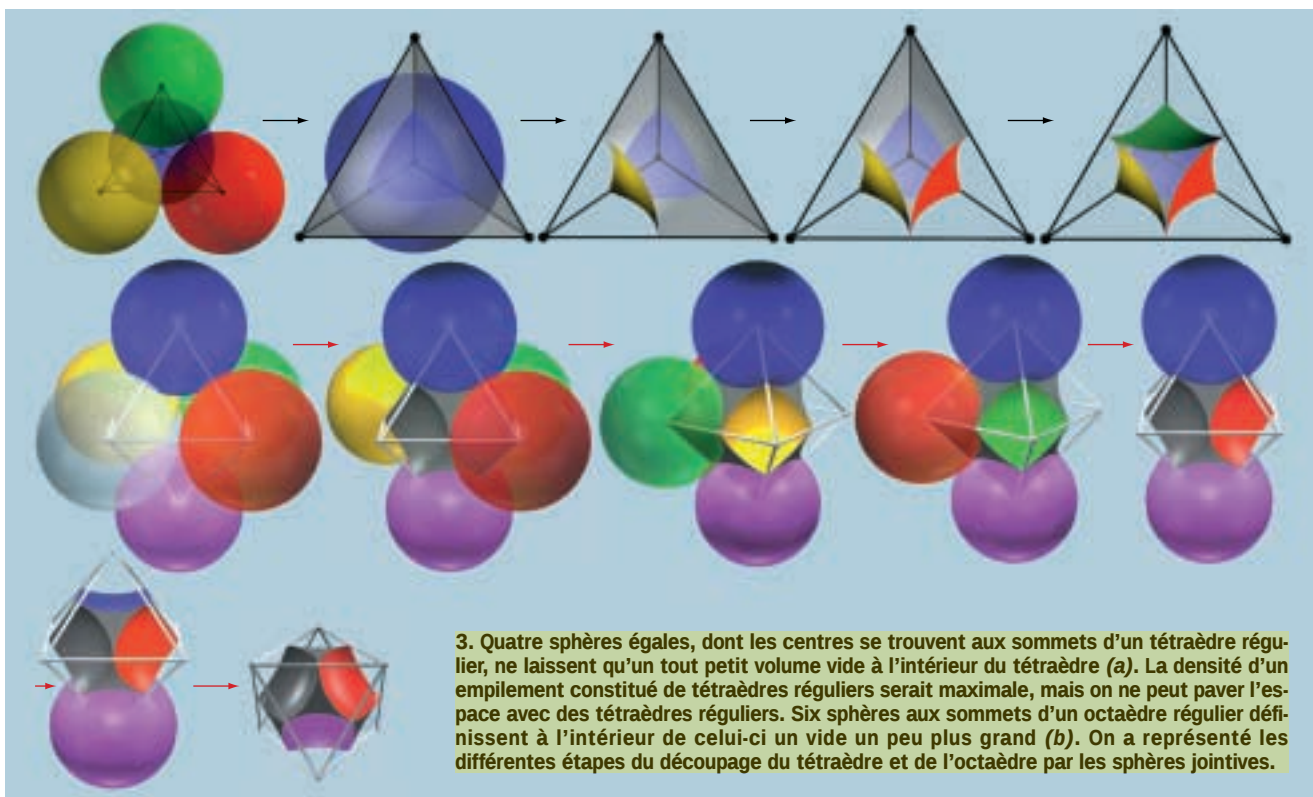
En effet, si vous réunissez à l'étroit des globules égaux errant sur un même plan horizontal, de sorte qu'ils se touchent réciproquement, ils s'unissent ou bien en forme triangulaire ou bien en forme carrée. Dans le premier cas, six globules en entourent un, dans l'autre cas, il y en a quatre. La proportion du contact est la même pour tous les globules, sauf les derniers. L'égalité ne peut être gardée par la forme pentagonale, l'hexagone se résout en triangles, de telle sorte que les deux ordres précités sont les seuls.

Si l'on en arrive à la construction solide la plus serrée qui puisse se faire, et qu'on superpose les uns aux autres les rangs d'abord ajustés en plan, ils seront ou bien en carré A ou en triangle B. S'ils sont en carré, ou bien un globe de l'ordre supérieur sera au-dessus d'un globe de l'ordre inférieur ou, au contraire, chaque globe du rang supérieur sera touché par les quatre qui l'entourent dans le même plan, par un au-dessus de lui et par un en dessous, et ainsi au total par six autres. L'ordre sera cubique et, après compression, on obtiendra des cubes, mais ce ne sera pas la disposition la plus

serrée. Dans la seconde manière, chaque globe est en contact, non seulement avec les quatre globes qui l'entourent dans le même plan, mais aussi avec quatre en dessous de lui, avec quatre au-dessus de lui et ainsi au total avec 12 : par compression, ces globes donneront des rhombiques. On rapprochera plutôt cet ordre-ci de l'octaèdre et de la pyramide. L'assemblage sera très serré, de sorte qu'ensuite aucune disposition ne permettra d'entasser un plus grand nombre de globules dans le même récipient.

D'autre part, si les dispositions construites en plan sont triangulaires, alors dans la construction solide, ou bien chaque globe de la couche supérieure se superpose à un globe de la couche inférieure dans une adaptation de nouveau lâche, ou bien chaque globe de la couche supérieure se trouve entre trois de l'ordre inférieur. De la première manière, chaque globe est touché par six qui l'entourent dans le même plan, par un au-dessus et par un en dessous, c'est-à-dire au total par huit autres. Cet ordre sera assimilé au prisme, et, par compression, on obtiendra, à la place des globules, des colonnes de six côtés quadrilatères avec deux bases hexagonales. De la deuxième manière, on obtiendra la même chose que plus haut, dans la deuxième possibilité de l'ordre carré.»

(L'Étrenne, traduction de Robert Halleux)



3. Quatre sphères égales, dont les centres se trouvent aux sommets d'un tétraèdre régulier, ne laissent qu'un tout petit volume vide à l'intérieur du tétraèdre (a). La densité d'un empilement constitué de tétraèdres réguliers serait maximale, mais on ne peut paver l'espace avec des tétraèdres réguliers. Six sphères aux sommets d'un octaèdre régulier définissent à l'intérieur de celui-ci un vide un peu plus grand (b). On a représenté les différentes étapes du découpage du tétraèdre et de l'octaèdre par les sphères jointives.

tanément tendance à déposer d'abord, comme nous l'avons fait, les sphères sur une surface plane, ce qui n'est pas une obligation.

Si l'on se limite ainsi aux empilements où les sphères sont disposées aussi régulièrement que les atomes dans un cristal, alors il est démontré que l'empilement que nous avons décrit est la meilleure solution. Les éventuels candidats pour un compactage encore plus dense doivent donc, s'ils existent, être moins ordonnés. Ils sont plus difficiles à imaginer et à construire, puis à répertorier.

Deuxièmement, on considère, dans le problème posé par Kepler, l'empilement

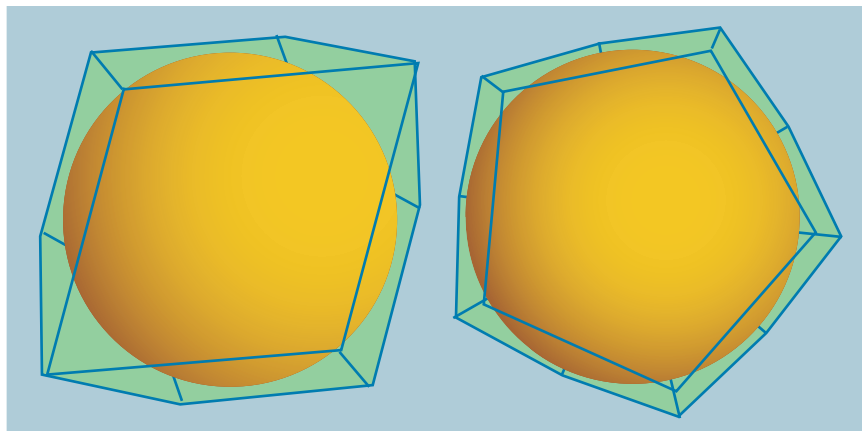
le plus compact pour un nombre infini de sphères. Le compactage avec un nombre fini de sphères est un problème qui semble proche, car on pourrait penser le prolonger à l'infini, mais tel n'est pas le cas. Ainsi, la tâche consistant à ranger un maximum d'oranges dans une caisse dépend de façon déterminante de la forme de la caisse, surtout pour les caisses de petite taille.

En fait, le passage du cas fini au cas infini est délicat : il y a, dans le cas infini, un nombre infini de variables, les coordonnées des centres des sphères. En dépit de ce grand nombre de choix d'arrangements, il n'y a pas, semble-t-il, de densité d'empilement plus grande (qu'il

convient d'ailleurs de définir par une valeur limite, puisque l'on tend vers le cas infini) que celle que l'on connaît. C'est ce qu'il *fallait démontrer*. Divers mathématiciens ont établi des bornes supérieures de la densité des différents compactages de sphères, qui s'approchent, sans l'atteindre, de la limite 0,74048...

Troisièmement, et c'est la difficulté principale, il existe des empilements de sphères plus denses que celui de Kepler, mais uniquement quand les sphères sont confinées dans un tout petit volume. Trois sphères disposées en triangle et une quatrième posée par-dessus ne laissent que très peu d'espace entre elles, moins que celui qui subsiste dans l'empilement régulier. Les centres des sphères forment un tétraèdre régulier (l'un des cinq solides platoniciens), et les sphères occupent le tétraèdre à 77,9636 pour cent. Avec un empilement constitué entièrement, ou du moins en majorité, de tels arrangements en tétraèdres, la densité limite de Kepler serait dépassée.

La partie fastidieuse des travaux de T. Hales est de démontrer que de tels empilements n'existent pas. Dans une disposition en tétraèdres, les sphères « se gênent » : on ne peut remplir un volume de tétraèdres réguliers sans laisser d'espaces. De plus, le gain local en densité de l'arrangement en tétraèdres disparaît déjà pour un nombre limité de sphères. Dès que l'on assemble plus de 53 sphères, n'importe quel arrangement tétraédrique est moins dense que celui des oranges.



4. L'antichambre d'une sphère dans l'empilement de Kepler est un solide limité par 12 losanges (rhombododécaèdre, à gauche). Plus réduite serait un antichambre en forme de dodécaèdre régulier, le solide platonicien formé de 12 pentagones réguliers (à droite). Toutefois le dodécaèdre régulier ne pave pas l'espace.