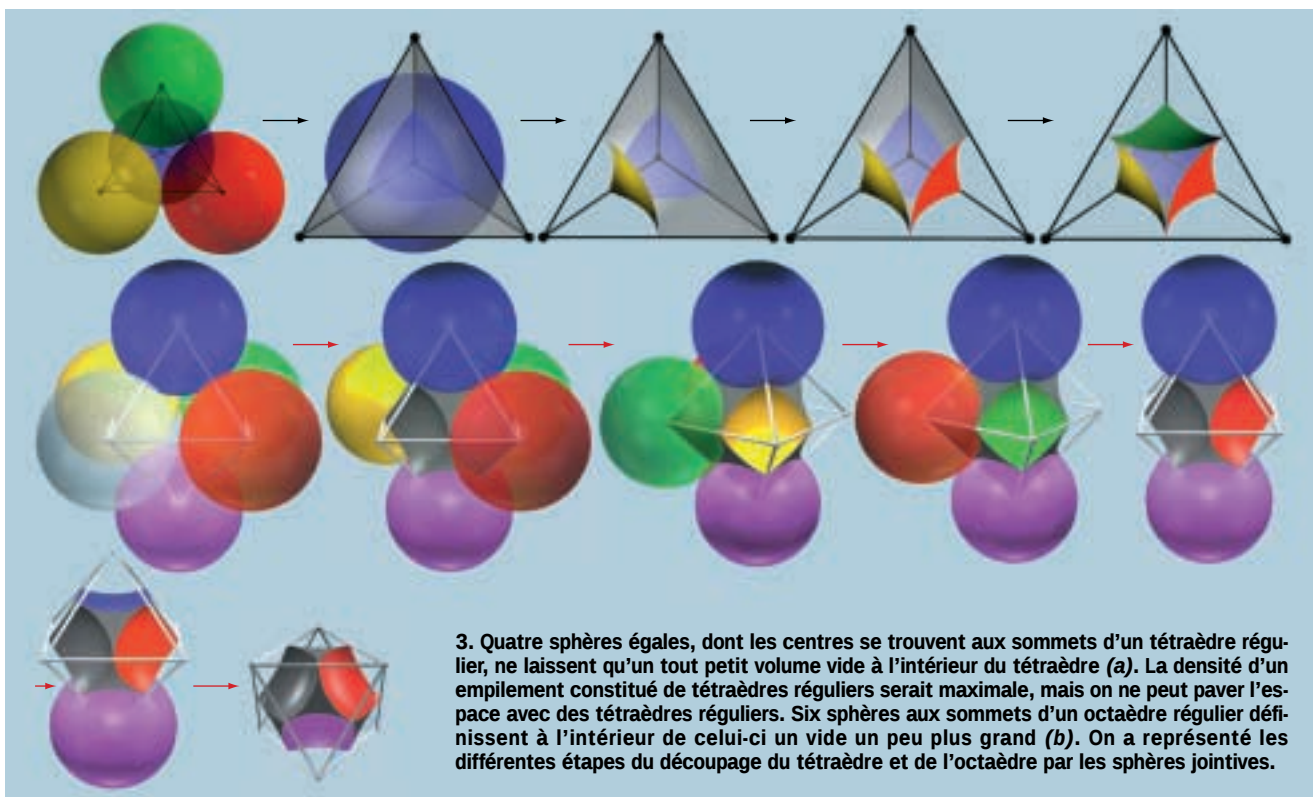




3. Quatre sphères égales, dont les centres se trouvent aux sommets d'un tétraèdre régulier, ne laissent qu'un tout petit volume vide à l'intérieur du tétraèdre (a). La densité d'un empilement constitué de tétraèdres réguliers serait maximale, mais on ne peut paver l'espace avec des tétraèdres réguliers. Six sphères aux sommets d'un octaèdre régulier définissent à l'intérieur de celui-ci un vide un peu plus grand (b). On a représenté les différentes étapes du découpage du tétraèdre et de l'octaèdre par les sphères jointives.

tanément tendance à déposer d'abord, comme nous l'avons fait, les sphères sur une surface plane, ce qui n'est pas une obligation.

Si l'on se limite ainsi aux empilements où les sphères sont disposées aussi régulièrement que les atomes dans un cristal, alors il est démontré que l'empilement que nous avons décrit est la meilleure solution. Les éventuels candidats pour un compactage encore plus dense doivent donc, s'ils existent, être moins ordonnés. Ils sont plus difficiles à imaginer et à construire, puis à répertorier.

Deuxièmement, on considère, dans le problème posé par Kepler, l'empilement

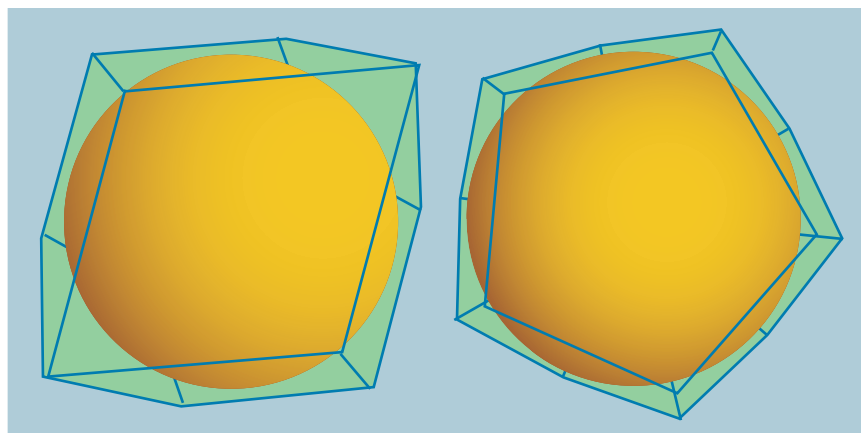
le plus compact pour un nombre infini de sphères. Le compactage avec un nombre fini de sphères est un problème qui semble proche, car on pourrait penser le prolonger à l'infini, mais tel n'est pas le cas. Ainsi, la tâche consistant à ranger un maximum d'oranges dans une caisse dépend de façon déterminante de la forme de la caisse, surtout pour les caisses de petite taille.

En fait, le passage du cas fini au cas infini est délicat : il y a, dans le cas infini, un nombre infini de variables, les coordonnées des centres des sphères. En dépit de ce grand nombre de choix d'arrangements, il n'y a pas, semble-t-il, de densité d'empilement plus grande (qu'il

convient d'ailleurs de définir par une valeur limite, puisque l'on tend vers le cas infini) que celle que l'on connaît. C'est ce qu'il *fallait démontrer*. Divers mathématiciens ont établi des bornes supérieures de la densité des différents compactages de sphères, qui s'approchent, sans l'atteindre, de la limite 0,74048...

Troisièmement, et c'est la difficulté principale, il existe des empilements de sphères plus denses que celui de Kepler, mais uniquement quand les sphères sont confinées dans un tout petit volume. Trois sphères disposées en triangle et une quatrième posée par-dessus ne laissent que très peu d'espace entre elles, moins que celui qui subsiste dans l'empilement régulier. Les centres des sphères forment un tétraèdre régulier (l'un des cinq solides platoniciens), et les sphères occupent le tétraèdre à 77,9636 pour cent. Avec un empilement constitué entièrement, ou du moins en majorité, de tels arrangements en tétraèdres, la densité limite de Kepler serait dépassée.

La partie fastidieuse des travaux de T. Hales est de démontrer que de tels empilements n'existent pas. Dans une disposition en tétraèdres, les sphères « se gênent » : on ne peut remplir un volume de tétraèdres réguliers sans laisser d'espaces. De plus, le gain local en densité de l'arrangement en tétraèdres disparaît déjà pour un nombre limité de sphères. Dès que l'on assemble plus de 53 sphères, n'importe quel arrangement tétraédrique est moins dense que celui des oranges.



4. L'antichambre d'une sphère dans l'empilement de Kepler est un solide limité par 12 losanges (rhombododécaèdre, à gauche). Plus réduite serait un antichambre en forme de dodécaèdre régulier, le solide platonicien formé de 12 pentagones réguliers (à droite). Toutefois le dodécaèdre régulier ne pave pas l'espace.

LA SOLUTION

L. Fejes-Toth a démontré, en 1940, que l'empilement hexagonal de disques était le plus compact possible : le problème plan était résolu. En 1953, ce mathématicien réduisit le problème de Kepler infini à un nombre fini, mais encore trop grand, de possibilités. Il imagina déjà que le problème pouvait être résolu par ordinateur. T. Hales a ramené le problème à l'analyse de 5 000 types d'empilements. L'ordinateur devint alors l'outil incontournable, quoique l'informatique joue, dans ce cas, un rôle moins fondamental que dans la fameuse démonstration du théorème des quatre couleurs. Ici, seule la comptabilisation et un certain nombre de calculs accessoires ont été délégués à la machine.

Dans l'empilement de Kepler, les tétraèdres réguliers sont toujours contigus, par une face, à des octaèdres réguliers (des solides platoniciens à huit côtés égaux) ; à chaque sommet se touchent huit tétraèdres et six octaèdres. L'arrangement de sphères correspondant est constitué de quatre sphères disposées en un carré, une sphère étant posée dans l'espace central par-dessus et une autre par dessous. À l'intérieur d'un octaèdre, il reste plus d'espace libre que dans le tétraèdre : la densité n'y est plus que de 0,720903...

Toujours est-il que l'on peut paver un volume avec des tétraèdres et des octaèdres sans espace vide, mais deux solides de même type ne se touchent jamais par une face. C'est le pavage qui correspond à l'empilement de Kepler.

T. Hales a réalisé le bilan du volume occupé par les sphères à l'aide d'une double «comptabilité». L'analyse des 5 000

cas individuels vise à montrer qu'aucun arrangement de sphères ne peut faire mieux qu'en accolant huit tétraèdres à un octaèdre, comme dans l'empilement de Kepler.

Pour établir un premier bilan comptable, il faut relier les centres des sphères voisines par des arêtes et étudier les polyèdres que forment ces arêtes. On est ainsi amené à considérer comme voisines des sphères qui sont proches, mais qui ne se touchent pas. Toutefois, le pavage de l'espace par des polyèdres n'est plus unique et naturel, comme il l'était dans le cas de Kepler ; rien n'empêche, en effet, de diviser un octaèdre par plusieurs plans perpendiculaires en quatre tétraèdres (non réguliers), sans introduire de nouveaux sommets. C'est là que cette méthode de comptabilité atteint ses limites.

Dans la seconde manière d'établir le bilan, les polyèdres enveloppent les sphères. À chaque sphère est associée une sorte d'antichambre (le nom officiel est «cellule de Voronoï»), ensemble de tous les points qui sont plus proches du centre de la sphère considérée que du centre de toute autre sphère. L'antichambre d'une sphère dans l'empilement de Kepler est un rhombododécaèdre (figure 4a). On peut paver l'espace avec ces rhombododécaèdres sans laisser de vide.

Plus l'antichambre est petite, meilleure est la densité d'empilement. Quelle est la plus petite antichambre possible ? Une sphère peut avoir au maximum 12 sphères voisines qui la touchent, comme on le sait depuis le siècle dernier. Comme d'habitude, le volume minimal de l'antichambre est atteint pour l'arrangement présentant la symétrie maximale : les 12 sphères contiguës sont placées aux sommets d'un icosaèdre régulier. L'antichambre est alors un dodécaèdre et la densité d'empilement est égale à 0,754737... ; malheureusement on ne peut pas empiler des dodécaèdres sans laisser d'espaces vides.

En combinant habilement ces deux méthodes de comptabilisation (constructions de polyèdres liant les centres des sphères et examen de cellules de Voronoï), T. Hales réussit à régler le sort des 5 000 empilements. Un seul cas était notablement plus difficile que tous les autres. L'élève de T. Hales, Samuel Ferguson, a écrit une thèse sur ce sujet ; dans ce cas, les sphères sont placées aux sommets d'un prisme ayant pour base un pentagone régulier et des parois carrées, que l'on peut coiffer en haut et en bas d'un couvercle plat de cinq triangles équilatéraux.

Finalement, toutes ces réflexions et bien d'autres encore mènent à des problèmes de minimisation. Les



Scott Tyrell

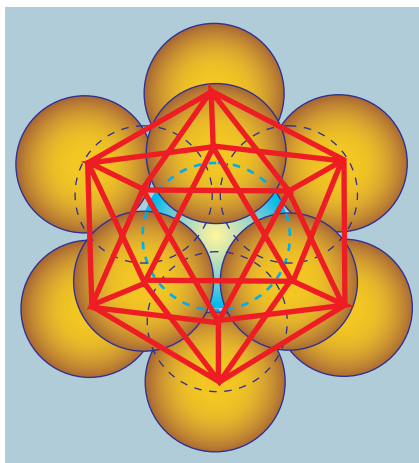
6. De nombreux mathématiciens ont établi des limites supérieures de la densité de compactage : 0,828 (Rankin, 1947), 0,7797 (Rogers, 1958), 0,77844 (Lindsey, 1987), 0,77836 (Muder, 1988), 0,7731 (Muder, 1993), jusqu'à ce que Thomas Hales (ci-dessus) démontre que la limite était celle déterminée par Kepler : 0,74048...

12 sphères tangentes à la sphère centrale ne sont pas tangentes entre elles, mais mobiles ; en fonction de leur position, le volume de l'antichambre varie. Il existe toujours un continuum d'arrangements possibles, que l'on n'arrive à maîtriser que si l'on trouve, parmi tous les arrangements d'une catégorie, le plus favorable et que l'on vérifie ensuite que même celui-là n'est pas meilleur que l'arrangement de Kepler. Il faut donc minimiser, dans de nombreux cas individuels, une fonction non linéaire de plusieurs variables.

Kepler a laissé son nom au problème, mais il ne l'a pas inventé : en 1600, le mathématicien anglais Thomas Harriot formula la question de l'empilement compact de sphères. Tenant de l'atomisme, il considérait les atomes comme des sphères et pensait avoir déterminé la densité maximale d'un solide.

Les considérations sur le problème de l'empilement des sphères ont des applications en codage : si, dans un espace à n -dimensions, le centre de chaque sphère représente un nombre binaire, il faut s'assurer que les autres nombres sont également distants deux à deux pour qu'une erreur ait le moins de chances possibles de transformer un nombre en un autre. Donc le problème est moins futile qu'il ne le paraît aux bécotins, et, comme toujours, les mathématiques triomphent.

Christoph PÖPPE est rédacteur à la revue *Spektrum der Wissenschaft*, édition en langue allemande de *Scientific American*.



5. On ne peut placer au maximum que 12 sphères égales en contact avec une sphère de même taille. Ces sphères ne sont pas jointives. La densité «de la cellule de Voronoï» est maximale pour cette configuration où les centres des sphères sont au sommet d'un icosaèdre.